Metody Numeryczne
Równania różniczkowe zwyczajne

Wojciech Szewczuk

Zagadnienie początkowe

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

Zagadnienie początkowe – istnienie

Nie każde zagadnienie początkowe (1) ma rozwiązanie!

Twierdzenie 1

Jeśli dla pewnych α*,* $\beta > 0$ *funkcja* f *jest ciągła w prostokącie*

$$R := \{(t, x) : |t - t_0| \leq \alpha, \quad |x - x_0| \leq \beta\}, \tag{2}$$

to zagadnienie (1) ma rozwiązanie $x(t)$ *dla* $|t - t_0| \leq \min\{\alpha, \beta/M\}$*, gdzie* $M := \max\limits_{t,\, x \in \mathbb{R}} |f(t, x)|$.

Przykład 1

Rozważmy równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

$$x' = (t + \sin x)^2, \qquad x(0) = 3$$

Gdzie istnieje rozwiązanie?
Funkcja $(t + \sin x)^2$ *jest ciągła na całej płaszczyźnie* (t, x)*, a więc* α *i* β *w definicji prostokąta mogą być dowolne. Stała* M *w twierdzeniu 1 nie przewyższa* $(\alpha + 1)^2$*. Jeśli* $\beta = \alpha(\alpha + 1)^2$*, to* $\min\{\alpha, \beta/M\} = \alpha$*, więc rozwiązanie istnieje na całej prostej rzeczywistej.*

Zagadnienie początkowe (1) może mieć wiele rozwiązań!

Przykład 2

$$x' = x^{2/3}, \qquad x(0) = 0$$

Rozwiązaniem jest funkcja $x(t) = 0$ *oraz* $x(t) = t^3/27$.
Dla zapewnia jednoznaczności o f *trzeba coś założyć.*

Zagadnienie początkowe – jednoznaczność

Twierdzenie 2

Jeśli funkcje f i $\partial f/\partial x$ są ciągłe w prostokącie

$$R := \{(t,x) : |t-t_0| \le \alpha, \quad |x-x_0| \le \beta\},$$

to dla $|t-t_0| < \min\{\alpha, \beta/M\}$ zagadnienie początkowe (1) ma jednoznaczne rozwiązanie.
$M := \max\limits_{t,\, x \in \mathbb{R}} |f(t,x)|$.

Istnienie i jednoznaczność w danym przedziale $[a, b]$ zapewnia następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3

Jeśli funkcja f jest ciągła dla $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < \infty$ i jeśli istnieje stała L taka, że :

$$\underbrace{|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|}_{\text{warunek Lipschitza}}, \tag{3}$$

to zagadnienie początkowe $x' = f(t,x),\ x(a) = \alpha$ ma w przedziale $[a, b]$ jednoznaczne rozwiązanie.

Zagadnienie początkowe – jednoznaczność

Przykład 3

Pokażemy, że funkcja $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i|x - w_i|$ *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $L = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i|x_1 - w_i| - \sum_{i=1}^{n} a_i|x_2 - w_i| \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \, ||x_1 - w_i| - |x_2 - w_i|| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||x_1 - x_2| = L|x_1 - x_2|.$$

Zastosowanie wzoru Taylora

Rozważmy zagadnienie:

$$x' = \cos t - \sin x + t^2, \qquad x(-1) = 3. \tag{4}$$

Napiszmy wzór Taylora z uwzględnieniem składników do czwartej pochodnej

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x''(t) + \frac{1}{3!}h^3x'''(t) + \frac{1}{4!}h^4x^{(4)}(t). \tag{5}$$

Nieznane wyrazy wyznaczmy różniczkując obustronnie równanie (4)

$$\begin{aligned} x'' &= -\sin t - x'\cos x + 2t \\ x''' &= -\cos t - x''\cos x + (x')^2\sin x + 2 \\ x^{(4)} &= \sin t - x'''\cos x + 3x'x''\sin x + (x')^3\cos x \end{aligned} \tag{6}$$

- używając rozwiązania w punkcie t używamy równania (5) do wyznaczenia rozwiązania w punkcie $(t+h)$ itd.
- metoda jest rzędu czwartego, $\mathcal{O}(h^4)$

Realizacja metody opartej o wzór (5) dla zagadnienia (4) może wyglądać następująco:

input M, h, t, x
$M \leftarrow 200$
$h \leftarrow 0.01$
$t \leftarrow -1$
$x \leftarrow 3$
output 0, t, x
for $k = 1$ **to** M **do**
  $x' \leftarrow \cos t - \sin x + t^2$
  $x'' \leftarrow -\sin t - x' \cos x + 2t$
  $x''' \leftarrow -\cos t - x'' \cos x + (x')^2 \sin x + 2$
  $x^{(4)} \leftarrow \sin t + \left((x')^3 - x'''\right) \cos x + 3x' x'' \sin x$
  $x \leftarrow x + h\left(x' + \frac{1}{2}h\left(x'' + \frac{1}{3}h\left(x''' + \frac{1}{4}hx^{(4)}\right)\right)\right)$
  $t \leftarrow t + h$
  output k, t, x
end do

Zastosowanie wzoru Taylora

Wady:

- trzeba wielokrotnie różniczkować funkcję f
- pochodne cząstkowe f muszą istnieć w obszarze przez, który przechodzi rozwiązanie

Zalety:

- prostota
- możliwa do osiągnięcia wysoka dokładność

Odrzucona reszta w metodzie opartej na wzorze Taylora wynosi:

$$E_n := \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} x^{(n+1)}(t + \theta h) \qquad (0 < \theta < 1). \tag{7}$$

Jest to błąd lokalny metody.
Nieznaną $(n+1)$-szą pochodną można przybliżyć:

$$E_n \approx \frac{1}{(n+1)!} h^n \left[x^{(n)}(t+h) - x^{(n)}(t) \right]. \tag{8}$$

Błędy

Ogólnie błędy można podzielić na:

- Błąd lokalny metody.
- Błąd lokalny zaokrąglenia.
- Błąd globalny metody.
- Błąd globalny zaokrąglenia.
- Błąd całkowity.

Błędy

Błąd lokalny jest skutkiem obcięcia procesu (wyrażenia) nieskończonego do postaci skończonej.

Skutki wszystkich błędów lokalnych metody kumulują się i dają błąd globalny. Błędy lokalne $\mathcal{O}(h^{n+1})$ dają błąd globalny równy co najmniej $\mathcal{O}(h^n)$, bo liczba kroków potrzebna do przejścia od t_0 do dowolnego T wynosi $(T - t_0)/h$.

Błąd lokalny zaokrąglenia jest spowodowany ograniczoną precyzją obliczeń i jest zależny od używanego typu zmiennych.

Błąd lokalny zaokrąglenia wpływa na obliczane później wartości i determinuje błąd globalny zaokrąglenia.

Błąd całkowity jest sumą błędów globalnych metody i zaokrąglenia.

Metoda Eulera jest najprostszą metodą rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych opartą na wzorze Taylora. Jest to metoda rzędu pierwszego.

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t,x) \tag{9}$$

- Zaleta: nie trzeba różniczkować f
- Wada: trzeba wybrać bardzo małe h

Metoda Rungego-Kutty

Rozwiązanie zagadnienia początkowego:

$$x' = f(t, x) \qquad\qquad x(t_0) \tag{10}$$

za pomocą metody Rungego-Kutty wymaga obliczenia dobranych w szczególny sposób wartości funkcji f zamiast pochodnych stosowanych w metodach opartych na wzorze Taylora.

Metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$x'(t) = f, \tag{11}$$

$$x''(t) = f_t + f_x x' = f_t + ff_x, \tag{12}$$

$$x'''(t) = f_{tt} + f_{tx} f + (f_t + ff_x) f_x + f (f_{xt} + ff_{xx}), \ldots \tag{13}$$

(11) – (13) podstawiamy do wzoru Taylora:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + fh + \frac{1}{2}h^2(f_t + ff_x) + \mathcal{O}\left(h^3\right) = \\ &= x + \frac{1}{2}hf + \frac{1}{2}h(f + hf_t + hff_x) + \mathcal{O}\left(h^3\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego

Pochodne cząstkowe w równaniu (14) można wyeliminować stosując wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych:

$$f(t+h, x+hf) = f + hf_t + hff_x + \mathcal{O}(h^2). \tag{15}$$

Wstawiając to do równania (14) otrzymamy:

$$x(t+h) = x + \frac{1}{2}hf + \frac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + \mathcal{O}\left(h^3\right) \tag{16}$$

A więc możemy napisać:

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{1}{2}\left(F_1 + F_2\right), \tag{17}$$

gdzie

$$F_1 := hf(t, x), \qquad F_2 := hf(t+h, x+F_1).$$

Wzór (17) definiuje metodą Rungego-Kutty rzędu drugiego, znaną też jako metoda Heuna.

Metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego

Ogólnie, każda metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego wynika ze wzoru:

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 hf(t + \alpha h, x + \beta hf) + \mathcal{O}(h^3), \tag{18}$$

gdzie w_1, w_2, α, β są parametrami. Równość (18) zachodzi jeśli

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 h(f + \alpha hf_t + \beta hff_x) + \mathcal{O}(h^3). \tag{19}$$

Porównując (19) z (14), wnioskujemy, że:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1, \\ w_2\alpha &= \frac{1}{2}, \\ w_2\beta &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Jedno z rozwiązań układu (20)

$$(w_1 = w_2 = \frac{1}{2},\ \alpha = \beta = 1)$$

daje metodę Heuna, ale możemy też przyjąć np.:

$$(w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ \alpha = \beta = \frac{1}{2}),$$

co da nam zmodyfikowaną metodę Eulera:

$$x(t+h) \approx x(t) + F_2, \tag{21}$$

gdzie

$$F_1 := hf(t,x), \qquad F_2 := hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1).$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \tag{22}$$

gdzie
$F_1 := hf(t, x)$,
$F_2 := hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1)$,
$F_3 := hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2)$,
$F_4 := hf(t + h, x + F_3)$.

Błąd wzoru (22) wynosi $\mathcal{O}(h^5)$.

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

Przykład 4

$$x' = t^{-2}(tx - x^2), \qquad x(1) = 2.$$

Rozwiązania powyższego zagadnienie początkowe poszukamy w przedziale $[1, 3]$ *dla* $h = 1/128$.
Rozwiązanie analityczne: $x(t) = t(\frac{1}{2} + \log t)^{-1}$.
Zastosowanie metody R-K rzędu czwartego sprowadzi się do użycia algorytmu:

input $M \leftarrow 256,\ t \leftarrow 1.0,\ x \leftarrow 2.0,\ h \leftarrow 1/128$
define $f(t, x) = (tx - x^2)/t^2$
define $u(t) = t/(1/2 + \log t)$
for $k = 1$ *to* M *do*
    $F_1 \leftarrow hf(t, x)$
    $F_2 \leftarrow hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1)$
    $F_3 \leftarrow hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2)$
    $F_4 \leftarrow hf(t + h, x + F_3)$
    $x \leftarrow x + (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F4)/6$
    $t \leftarrow t + h$
    output $k,\ t,\ x\ |u(t) - x|$
end do

Przykład c.d.

h	t	x	$\|u(t) - x\|$
0	1	2	0
1	1.00781	1.98473	1.2×10^{-7}
2	1.01563	1.97016	0
9	1.07031	1.88452	0
249	2.94531	1.86387	7.2×10^{-7}
256	3.00000	1.87663	6×10^{-7}

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego – błąd lokalny

Pierwszy krok metody R-K rzędu czwartego (22) daje rozwiązanie przybliżone $\tilde{x}(t_0 + h)$.
Błąd lokalny metody wynosi:

$$x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h).$$

- Dla małych h błąd lokalny zachowuje się jak Ch^5.
- Nieznane C zależy od t_0 i rozwiązania x.
- C nie zależy od h.

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego – błąd lokalny

- Aby oszacować iloczyn Ch^5 załóżmy, że C lokalnie jest stałe.
- Niech $\hat{x}(t_0 + h)$ będzie rozwiązaniem przybliżonym otrzymanym z $x(t_0)$ za pomocą dwóch kroków metody, z $h/2$ zamiast h.

$$x(t_0 + h) = \tilde{x}(t_0 + h) + Ch^5 \tag{23}$$

$$x(t_0 + h) = \hat{x}(t_0 + h) + 2C(h/2)^5 \tag{24}$$

Z równań (23) i (24) otrzymujemy błąd lokalny:

$$Ch^5 = \frac{15}{16}\left[\hat{x}(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)\right] \approx \hat{x}(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h) \tag{25}$$

Liczba wartości funkcji:	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksymalny rząd metody R-K:	1	2	3	4	4	5	6	6

Metoda adaptacyjna Rungego-Kutty-Fehlberga – algorytm

$$\hat{x} = x(t) + \sum_{i=1}^{6} a_i F_i \tag{26}$$

$$\tilde{x} = x(t) + \sum_{i=1}^{6} b_i F_i \tag{27}$$

$$F_i = hf\left(t + c_i h, x + \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} F_j\right) \qquad (1 \leq i \leq 6) \tag{28}$$

$$e = \hat{x}(t+h) - \tilde{x}(t+h) = \sum_{i=1}^{6} (a_i - b_i) F_i \tag{29}$$

i	a_i	$a_i - b_i$	c_i	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}	d_{i4}	d_{i5}
1	$\frac{16}{135}$	$\frac{1}{360}$	0					
2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{6656}{12825}$	$-\frac{128}{4275}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
4	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
5	$-\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
6	$\frac{2}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$

Metoda adaptacyjna Rungego-Kutty-Fehlberga – algorytm

$$x' = f(t, x) \qquad\qquad x(a) = \alpha$$

- ustalamy początkowy krok $h > 0$
- ustalamy wielkość δ, której e nie powinno przekroczyć
- ustalamy maksymalną liczbę M kroków
- podwajamy h, gdy $|e| < \delta/128$ ($e \approx Ch^5 \quad \Rightarrow \quad e < \delta/4$)

Metoda adaptacyjna Rungego-Kutty-Fehlberga – algorytm

```
input a, α, b, h, δ, M
t ← a;  x ← α
k ← 0;  iflag ← 1
while k < M do
    d ← b − t
    if |d| ≤ h then
      iflag ← 0
      h ← d
    end if
    y ← x
    compute F_1, F_2, ..., F_6 z wzoru (28)
    compute x z wzoru (26)
    compute e z wzoru (29)
    if |e| ≥ δ then
      h ← h/2;  x ← y
    else
      if |e| ≤ δ/128 then
        h ← 2h;  x ← y
      else
        t ← t + h;  k ← k + 1
        output k, t, x, e
        if iflag = 0 then stop
      end if
    end if
end while
```

Metoda adaptacyjna Rungego-Kutty-Fehlberga – algorytm

Alternatywnie wielkością h można sterować za pomocą wzoru

$$h = 0.9h\left[\delta/|e|\right]^{1/(1+p)}, \tag{30}$$

gdzie p jest rzędem dokładniejszego wzoru z pary (26), (27).

Metody wielokrokowe

- Metody jednokrokowe – przejście z punktu t do $t + h$ wymaga znajomości tylko jednej wartości rozwiązania, mianowicie $x(t)$
- Metody wielokrokowe – wartość funkcji x w nowym punkcie wyraża się przez jej wartości w kilku punktach

Rozważmy zagadnienie początkowe:

$$x'(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{31}$$

Całkujemy obie strony równania (26):

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\, dt. \tag{32}$$

Całkę po prawej stronie można obliczać numerycznie, stosując kwadraturę z węzłami t_i.

Metody wielokrokowe – wzór Adamsa-Bashfortha

Weźmy

$$f_i := f(t_i, x_i),$$

gdzie x_i jest przybliżoną wartością rozwiązania w punkcie t_i.
Wynikające z (27) wzory:

$$x_{n+1} = x_n + af_n + bf_{n-1} + cf_{n-2} + \ldots \tag{33}$$

nazywamy wzorami Adamsa-Bashfortha.
Jednym z nich jest wzór rzędu piątego, poprawny przy założeniu, że $t_i = t_0 + ih \quad (i \geq 1)$:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{720}h\left(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}\right) \tag{34}$$

Metody wielokrokowe – wzór Adamsa-Bashfortha

Równanie (29) wynika z następującego przybliżenia całki (27):

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\, dt \approx h(Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2} + Df_{n-3} + Ef_{n-4}). \tag{35}$$

Współczynniki A, B, ..., E określamy tak, aby powyższa równość przybliżona była dokładna , gdy tylko $f(t, x(t))$ jest wielomianem klasy Π_4.

Metody wielokrokowe – wzór Adamsa-Moultona

Przyjmując, że wartość przybliżona całki (32) może zależeć także od f_{n+1} otrzymamy wzory Adamsa-Moultona.

$$x_{n+1} = x_n + af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} + \dots \tag{36}$$

Do tej klasy należy wzór rzędu piątego poprawny dla $t_i = t_0 + ih$:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{720}h\left(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}\right) \tag{37}$$

Wzór Adamsa-Moultona daje lepszą dokładność niż wzór Adamsa-Bashfortha, ale szukane x_{n+1} występuje także po prawej stronie, w f_{n+1}.

- wstępną wartość x^*_{n+1} możemy wyznaczyć z wzoru Adamsa-Bashfortha
- wzór Adamsa-Moultona z $f(t_{n+1}, x^*_{n+1}$ po prawej stronie daje poprawioną wartość x_{n+1}
- medoda typu predyktor-korektor – ekstrapolacyjno-interpolacyjna

Układ równań różniczkowych rzędu pierwszego ma standardową postać:

$$x_i' = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1 \le i \le n). \tag{38}$$

Przykład 5

$$x' = x + 4y$$
$$y' = 4x + 5y$$
$$x(\ln 3) = 1$$
$$y(\ln 3) = 2$$

Symbolika wektorowa

Niech X będzie wektorem kolumnowym o składowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zależnych od t.

- X odwzorowuje $\mathbb{R}$ (lub przedział z $\mathbb{R}$) w $\mathbb{R}^n$

Niech F będzie wektorem kolumnowym o składowych $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Każda z nich jest określona na przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ (lub jej podzbiorze).

- F odwzorowuje $\mathbb{R}^{n+1}$ w $\mathbb{R}^n$

Układ (38) przybiera postać:

$$X' = F(t, X) \tag{39}$$

Zagadnienie początkowe jest określone przez układ (39) i wartości $X(t_0)$:

$$X' = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0. \tag{40}$$

Równania różniczkowe wyższego rzędu

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{41}$$

Równanie różniczkowe (41) możemy przekształcić na układ równań różniczkowych rzędu pierwszego, wprowadzając nowe zmienne równe pochodnym funkcji y:

$$\begin{aligned} x_k' &= x_{k+1} \qquad (1 \le k \le n-1), \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned} \tag{42}$$

Przykład 6

Przekształcić zagadnienie początkowe:

$$y'' + 3y' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

do postaci 40.
Zdefiniujemy nowe zmienne:

$$x_1 = y, \qquad x_2 = y'$$

Wtedy:

$$x_1' = x_2 \qquad\qquad x_1(0) = 1$$

$$x_2' + 3x_2 + x_1 = 0 \rightarrow x_2' = -x_1 - 3x_2 \qquad\qquad x_2(0) = 0$$

Przykład 7

Przekształcić zagadnienie początkowe:

$$(\sin t)y''' + \cos(ty) + \sin(t^2 + y'') + (y')^3 = \log t,$$

$$y(2) = 7,\ \ y'(2) = 3,\ \ y''(2) = -4$$

do postaci 40.
Zdefiniujemy nowe zmienne:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = \frac{\log t - \cos(tx_1) - \sin(t^2 + x_3) - (x_2)^3}{\sin t}$$

$$x_1(2) = 7, \quad x_2(2) = 3, \quad x_3(2) = -4$$

Zastosowanie wzoru Taylora dla układu równań

$$X(t+h) \approx X(t) + hX'(t) + \frac{1}{2!}h^2X''(t) + \ldots + \frac{1}{n!}h^nX^{(n)}(t) \tag{43}$$

Zastosowanie wzoru Taylora dla układu równań

Przykład 8

$$
\begin{aligned}
x' &= y \\
y' &= -x \\
x(0) &= 0 \\
y(0) &= 1
\end{aligned} \tag{44}
$$

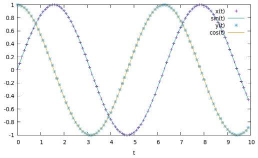
Rozwiązanie analityczne: $x = \sin t, \quad y = \cos t.$
Obliczamy potrzebne pochodne:

$$x'' = y'$$

$$y'' = -x'$$

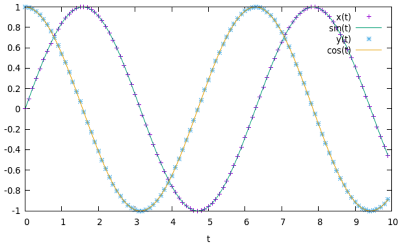
$$x''' = y''$$

$$y''' = -x''$$



Obliczenia z przykładu 8 można wykonać według następującego algorytmu:

$t \leftarrow 0;\quad x \leftarrow 0;\quad y \leftarrow 1;\quad h \leftarrow 0.1;\quad M \leftarrow 30$
output $0,\ t,\ x,\ y$
for $k = 1$ to M do
  $x' \leftarrow y$
  $y' \leftarrow -x$
  $x'' \leftarrow y'$
  $y'' \leftarrow -x'$
  $x''' \leftarrow y''$
  $y''' \leftarrow -x''$
  $x \leftarrow x + h(x' + \frac{1}{2}h(x'' + \frac{1}{3}hx'''))$
  $y \leftarrow y + h(y' + \frac{1}{2}h(y'' + \frac{1}{3}hy'''))$
  $t \leftarrow t + h$
  output $k,\ t,\ x,\ y$
end do



Klasyczna metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego dla układu równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$X(t+h) \approx X(t) + \frac{1}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right) \tag{45}$$

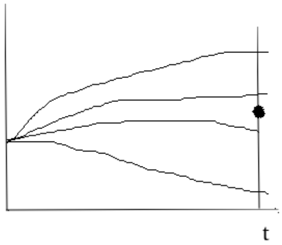
$F_1 = hF(X)$,
$F_2 = hF(X + \frac{1}{2}F_1)$,
$F_3 = hF(X + \frac{1}{2}F_2)$,
$F_4 = hF(X + F_3)$.

Zagadnienie brzegowe

$$x'' = f(t, x, x'), \qquad x(a) = \alpha, \qquad x(b) = \beta \tag{46}$$

Zagadnienie brzegowe – metoda strzału

- W metodzie strzału zagadnienie brzegowe (46) zamieniamy na zagadnienie początkowe z sensownie dobraną wartością początkową $x'(a)$.
- Rozwiązujemy to nowe zagadnienie , co daje wartość $x(b)$
  - Jeśli wybór $x'(a)$ był trafny, to $x(b) = \beta$ i obliczenia są zakończone.
  - W przeciwnym razie wybieramy inne $x'(a)$ i znów rozwiązujemy zagadnienie początkowe.



- z próbna wartość $x'(a)$
- x_z - rozwiązaniee zagadnienia początkowego

$$x'' = f(t, x, x'), \qquad x(a) = \alpha, \qquad x'(a) = z \tag{47}$$

- szukamy takiego parametru z, żeby było $x_z(b) = \beta$.

$$\Downarrow$$

Rozwiązujemy równanie

$$\phi(z) = 0, \tag{48}$$

gdzie

$$\phi(z) = x_z(b) - \beta.$$

Metoda siecznych

$$z_n = z_{n-1} - \frac{z_{n-1} - z_{n-2}}{\phi(z_{n-1}) - \phi(z_{n-2})}\phi(z_{n-1}) \qquad (n > 2). \tag{49}$$

Metoda Newtona

$$z_{n+1} = z_n - \frac{\phi(z_n)}{\phi'(z_n)} \tag{50}$$

Pochodną $\phi'(z_n)$ wyzmaczamy różniczkując stronami względem z równości (47):

$$\frac{\partial x''}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}, \qquad \frac{\partial x(a)}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial x'(a)}{\partial z} = 1.$$

Uproszczenie i podstawienie $v = \partial x/\partial z$ daje związki

$$v'' = f_x(t,x,x')v + f_{x'}(t,x,x')v', \qquad v(\alpha) = 0, \qquad v'(\alpha) = 1 \tag{51}$$

opisujące pewne zagadnienie początkowe.

- Równanie różniczkowe (51) nazywamy pierwszym równaniem wariacyjnym.
- Zagadnienie (51) rozwiązujemy wraz z (47) i dostajemy wartość $v(b)$
- $v(b)$ jest z definicji równe $\partial x_z(b)/\partial z = \phi'(z)$
- teraz możemy zastosować metodę Newtona

Definicja 1

Metoda wielocelowa strzałów polega na tym, że dzielimy przedział [a,b] na podprzedziały i w każdym z nich rozwiązujemy zagadnienie początkowe.

Metoda wielocelowa strzałów

Dla prostoty weźmy tylko dwa przedziały $[a, c]$ i $[c, b]$. Wtedy zagadnienie brzegowe :

$$x'' = f(t, x, x'), \qquad x(a) = \alpha, \qquad x(b) = \beta \tag{52}$$

generuje dwa zagadnienia początkowe:

$$x_1'' = f(t, x_1, x_1'), \qquad x_1(a) = \alpha, \qquad x_1'(a) = z_1 \qquad (a \leq t \leq c), \tag{53}$$

$$x_2'' = f(t, x_2, x_2'), \qquad x_2(b) = \beta, \qquad x_2'(b) = z_2 \qquad (c \leq t \leq b). \tag{54}$$

Ostatnie zagadnienie rozwiązujemy w kierunku malejącego t.
Parametry z_1, z_2 wybieramy tak, aby rozwiązanie

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & (a \leq t \leq c) \\ x_2(t) & (c \leq t \leq b) \end{cases}$$

było ciągłe i miało ciągłą pochodną w c.
Mamy zatem do rozwiązania układ równań

$$x_1(c) = x_2(c)$$

$$x_1'(c) = x_2'(c)$$

Powyższy układ zazwyczaj rozwiązujemy metodą Newtona.

Metoda wielocelowa strzałów

Gdy przedział $[a, b]$ dzielimy na k podprzedziałów:

- dostajemy k zagadnień początkowych i ich rozwiązań określonych w tych przedziałach
- warunki ciągłości w punktach podziału dają $2k - 2$ równań
- mamy $2k - 2$ nieznanych parametrów , występujących w warunkach początkowych
- układ równań można rozwiązać metodą Newtona

Zagadnienie brzegowe – różnice skończone

Inne podejście do zagadnienia brzegowego polega na zastąpieniu pochodnych wyrażeniami przybliżonymi:

$$x'(t) = \frac{1}{2h}\left[x(t+h) - x(t-h)\right] - \frac{1}{6}h^2 x'''(\xi)$$

$$x''(t) = \frac{1}{h^2}\left[x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)\right] - \frac{1}{12}h^2 x^{(4)}(\tau)$$

Jak poprzednio rozważamy zagadnienie brzegowe w postaci

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha, \; x(b) = \beta.$$

Zagadnienie brzegowe – różnice skończone

Przedział $[a, b]$ dzielimy punktami

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b.$$

Dla uproszenia zagadnienia załóżmy, że punkty są równoodległe

$$t_i = a + ih \qquad (0 \le i \le n+1) \text{ gdzie } h = (b-a)/(n-1).$$

Oznaczmy przybliżoną wartość $x(t_i)$ przez y_i. Teraz możemy zapisać dyskretną postać rozważanego zagadnienia:

$$\begin{aligned} & y_0 = \alpha, \\ & h^{-2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = f\left(t_i, y_i, (2h)^{-1}(y_{i+1} - y_{i-1})\right) \qquad (1 \le i \le n) \\ & y_{n+1} = \beta \end{aligned} \tag{55}$$

Mamy układ n równań z n niewiadomymi $y_1, y_2, \dots, y_n$. W ogólności może on być nieliniowy i kłopotliwy do rozwiązania.

Problem 55 upraszcza się w przypadku liniowym

$$f(t,x,x') = u(t) + v(t)x + w(t)x'$$

Teraz nasz układ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
&y_0 = \alpha,\\
&\left(1 + \frac{1}{2}hw_i\right) y_{i-1} - \left(2 + h^2 v_i\right) y_i + \left(1 - \frac{1}{2}hw_i\right) y_{i+1} = h^2 u_i \qquad (1 \le i \le n) \qquad (56)\\
&y_{n+1} = \beta,
\end{aligned}$$

gdzie $u_i = u(t_i)$ itd.

Wprowadźmy oznaczenia

$$a_i = 1 + \frac{1}{2} h w_i \qquad\qquad d_i = -\left(2 + h^2 v_i\right)$$

$$c_i = 1 - \frac{1}{2} h w_i \qquad\qquad b_i = h^2 u_i$$

i zapiszmy układ w postaci

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_0\alpha \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ y_n - c_n\beta \end{bmatrix} \tag{57}$$

Jest to układ z macierzą trójprzekątniową $\Rightarrow$ algorytm tri.
Jeśli $v(t) > 0$, a h takie, że $|hw_i| \leq 2$, to macierz jest przekątniowo dominująca.

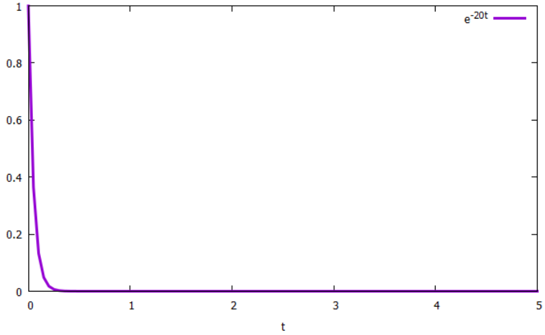
Inne metody:

- Kollokacja

Równania sztywne

Sztywność układu równań różniczkowych oznacza szybkie zanikanie rozwiązań w miarę wzrostu t.

- Pewne metody numeryczne, na ogół skuteczne, zawodzą dla równań sztywnych.
    - Stabilność rozwiązania można uzyskać tylko dla bardzo małych h



Równania sztywne - jawna metoda Eulera

$$x' = \lambda x, \qquad x(0) = 1 \tag{58}$$

Rozwiązanie dokładne równania (55): $x(t) = e^{\lambda t}$.

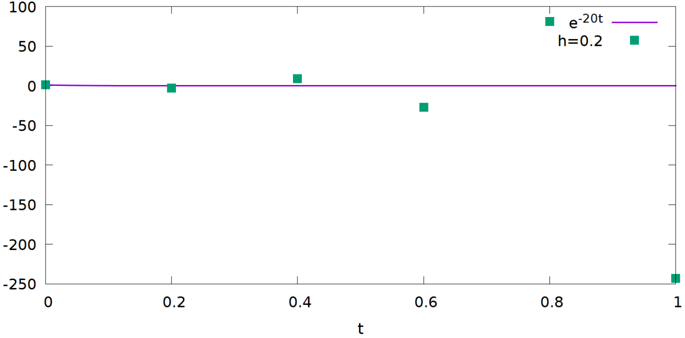
Metoda Eulera:
$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \qquad t_n = t_0 + nh, \qquad (n \geq 0).$

Dla problemu (55) otrzymamy:

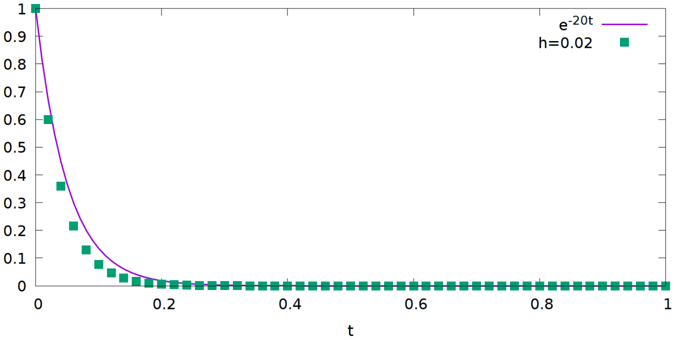
$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + h\lambda)x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = (1 + h\lambda)^n \tag{59}$$

- rozwiązanie dokładne $x(t) = e^{\lambda t} \to 0$ dla $\lambda < 0$ i $t \to \infty$
- rozwiązanie numeryczne $x_n = (1 + h\lambda)^n \to 0$ dla $n \to \infty$ i $|1 + h\lambda| < 1$
  - $1 + h\lambda > -1 \quad \Rightarrow \quad h < -2/\lambda$
  - np. dla $\lambda = -20$ musi być $h < 0.1$

Równania sztywne - jawna metoda Eulera



Równania sztywne - jawna metoda Eulera



Równania sztywne - niejawna metoda Eulera

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \qquad (n \geq 0) \tag{60}$$

Dla problemu (55)

$$x' = \lambda x, \qquad x(0) = 1$$

otrzymamy

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_{n+1}$$

$$x_{n+1} = (1 - h\lambda)^{-1} x_n$$

$$x_n = (1 - h\lambda)^{-n} \tag{61}$$

- dla $\lambda < 0$ wielkość (58) naśladuje zachowanie dokładnego rozwiązania jeśli $|1 - h\lambda|^{-1} < 1$, a tak jest dla każdego $h > 0$

Równania sztywne - niejawna metoda Eulera