Astrofizyka Układów Planetarnych

3

DYNAMIKA UKŁADU PLANETARNEGO

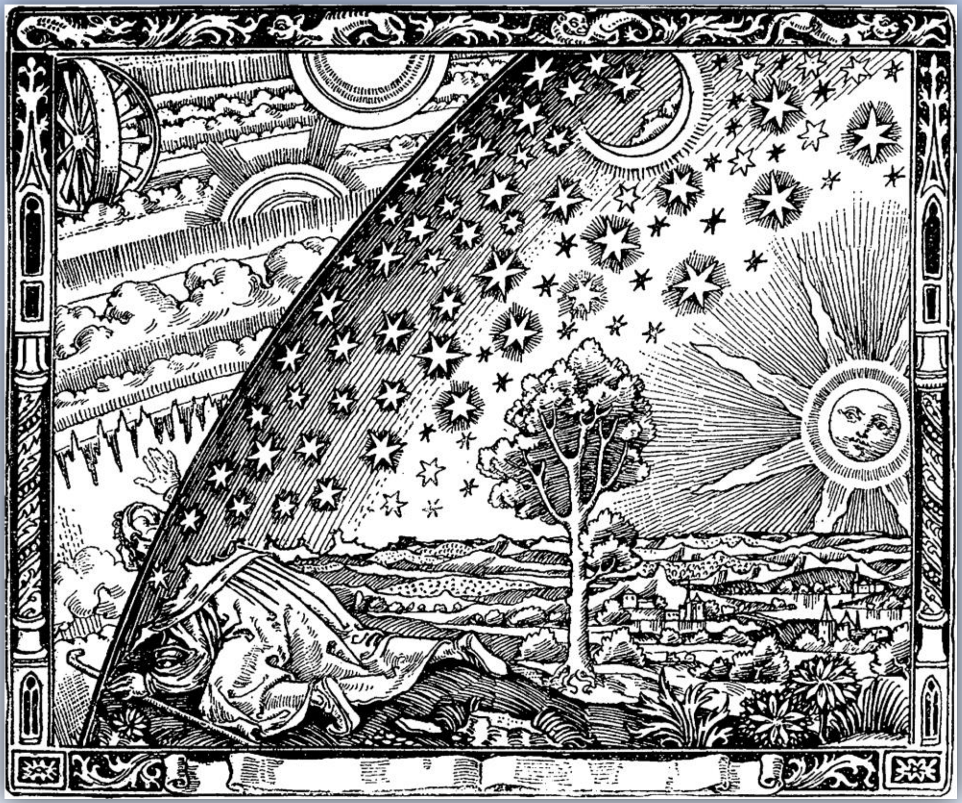
Dynamika układu planetarnego

Porządek z chaosu

Człowiek obserwując niebo od czasów prehistorycznych, szukał porządku, cykliczności i praw rządzących Kosmosem. Dzięki temu możliwe jest poznanie tego jak działa Wszechświat, jaki był on wcześniej, jaki będzie później, jaki jest daleko stąd.

Cykliczność, a stąd przewidywanie zjawisk na niebie opanowano dość dawno temu (długość roku, zaćmienia…). Odkrycie praw rządzących „kosmiczną maszyną” zajęło trochę więcej czasu.

Dysk z Nebry



Rysunek z książki *L'atmosphère: météorologie populaire* C. Flammariona

Dynamika układu planetarnego

Słońce wszystkim rządzi

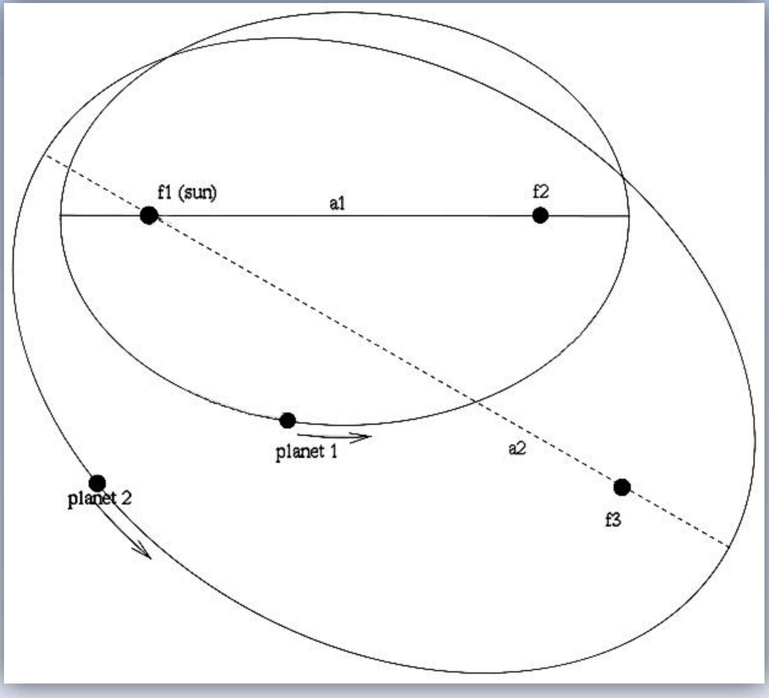
Pierwszym krokiem w stronę poznania praw fizycznych rządzących Układem Słonecznym były reguły opisujące ruch planet wokół Słońca podane przez Keplera:

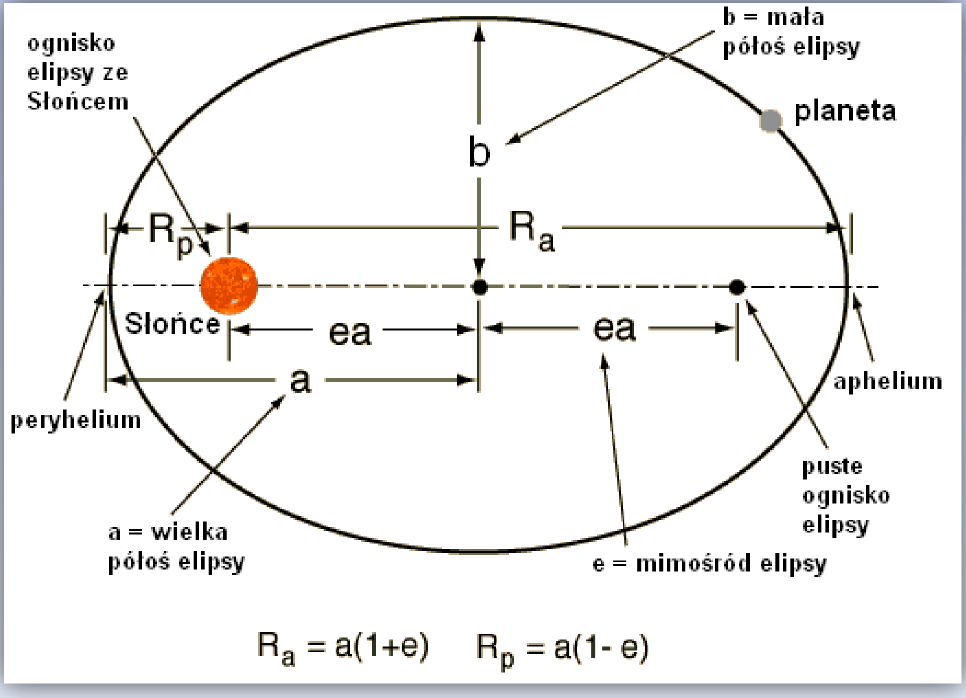
- Planety poruszają się po elipsach ze Słońcem znajdującym się w jednym z ognisk.
- Wektor łączący planetę ze Słońcem zakreśla pole w stałym tempie

$$\frac{dA}{dt} = const$$

- Kwadrat okresu orbitalnego planety jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej jej orbity

$$P^2 = ka^3$$





Dynamika układu planetarnego

Grawitacja i jej Newton

Dlaczego ruch planet podlega tym regułom?
Model fizyczny, z którego wynikają prawa Keplera, sformułował Newton. Jest to prawo powszechnego ciążenia:

- *Między dowolną parą ciał posiadających masy pojawia się siła przyciągająca, która działa na linii łączącej ich środki, a jej wartość rośnie z iloczynem ich mas i maleje z kwadratem odległości.*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Prawo to w połączeniu z prawami dynamiki, również podanymi przez Newtona:

- *Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego jednostajnego, jeżeli siły przyłożone nie zmuszą ciała do zmiany tego stanu.*
- *Zmiana ruchu (pędu) jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.*

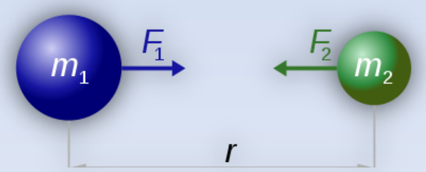
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\vec{a}$$

- *Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie zwrócone przeciwnie i równe, to jest wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe i zwrócone przeciwnie.*

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

dla siły grawitacji:

$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} = -\vec{F}_2$$



pozwoliły zrozumieć wiele zjawisk zachodzących we Wszechświecie.

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Zagadnienie dwóch ciał jest najprostszym rozwiązywalnym problemem w dynamice układu planetarnego. Mamy tu dwa ciała poruszające się pod wpływem wzajemnych oddziaływań grawitacyjnych. Duża różnorodność mas w Układzie Słonecznym pozwala zastosować to uproszczenie jako pierwsze przybliżenie ruchu planet wokół Słońca lub księżyców wokół planet (dwa ciała, a pozostałe obiekty są źródłem zaburzeń).

W zagadnieniu mamy dwa ciała:

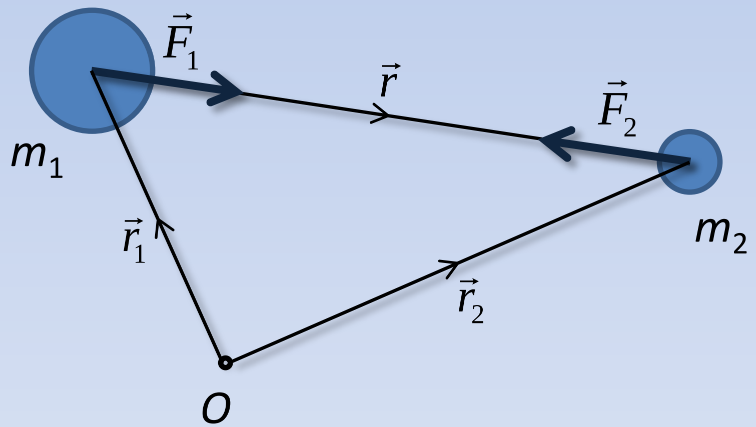
- o masach m_1 i m_2
- odległe o r_1 i r_2 od pewnego nieruchomego punktu O (w układzie inercjalnym)
- a do siebie o r:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- i działające na siebie siłami grawitacyjnymi F_1, F_2 powodującymi ich przyspieszanie:

$$\vec{F}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \qquad \vec{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} = m_2\ddot{\vec{r}}_2$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



Dynamika układu planetarnego

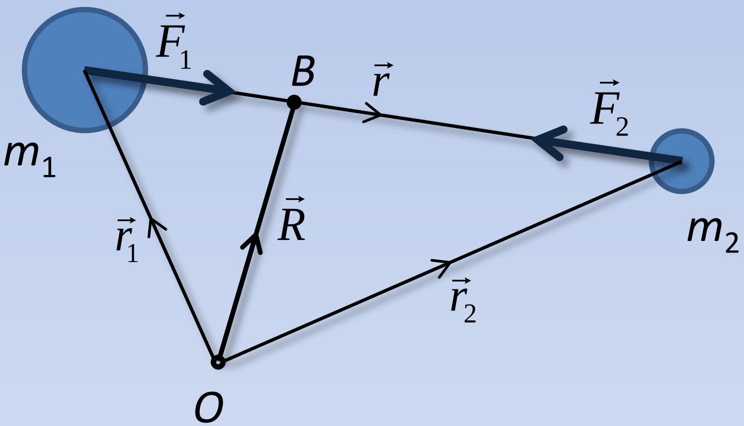
Zagadnienie dwóch ciał

Dodając stronami równania na siły otrzymamy:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

a wykorzystując położenie środka masy B (barycentrum):

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



mamy:

$$\ddot{\vec{R}}(m_1 + m_2) = 0$$

stąd:

$$\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b}$$

gdzie ***a*** i ***b*** to stałe wektory, *t* – czas.

Wniosek:

barycentrum nie porusza się lub porusza z stałą prędkością po linii prostej względem punktu O (układu inercjalnego)

Dynamika układu planetarnego

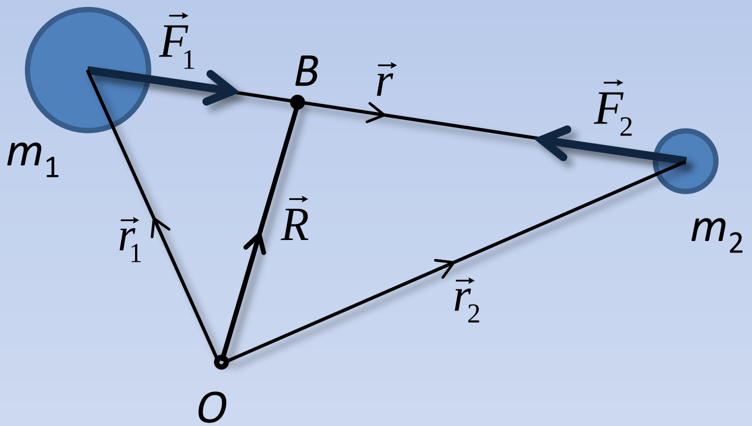
Zagadnienie dwóch ciał

Różniczkując dwukrotnie po czasie równie na wektor ***r*** otrzymamy:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

Równania na siły grawitacyjne F_1, F_2 dają:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_2}{r^3}\vec{r} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1}{r^3}\vec{r}$$



Łącząc powyższe równania mamy:

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} + G\frac{M}{r^3}\vec{r} = 0$$

lub:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

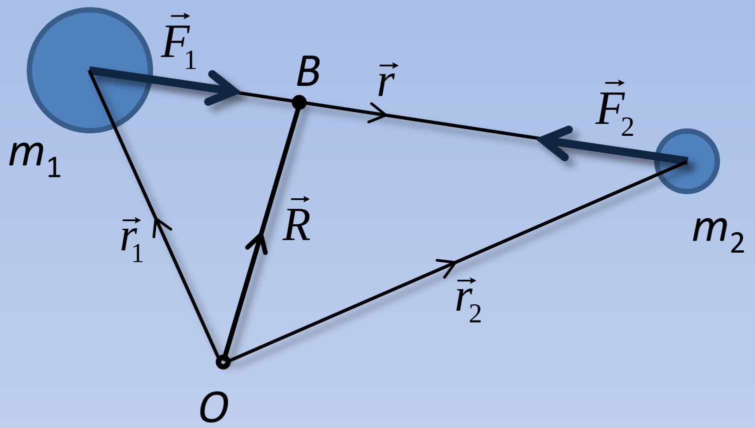
Otrzymujemy **równanie ruchu względnego** (m_2 względem m_1), gdzie M to całkowita masa układu, a μ to (standardowy) parametr grawitacyjny (nie mylić z masą zredukowaną):

$$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = G(m_1 + m_2)$$

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Mnożąc wektorowo ***r*** i równanie ruchu względnego otrzymamy:



$$\vec{r} \times \left(\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) = 0$$

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

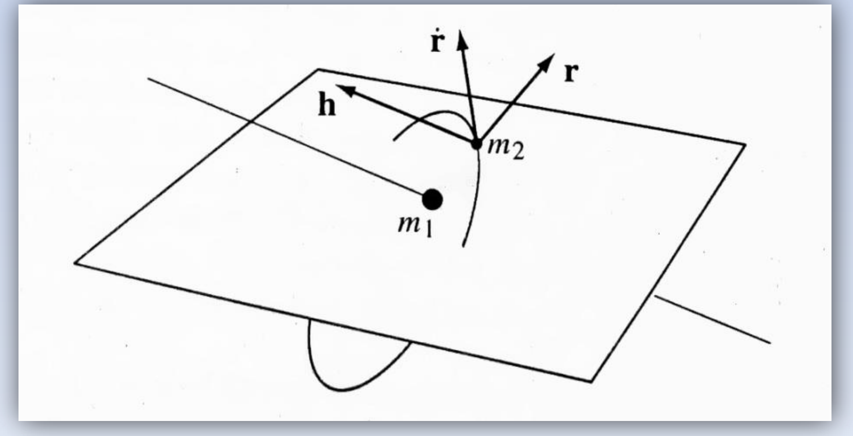
a po scałkowaniu po czasie:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}$$

gdzie ***h*** to stały wektor prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektor położenia i prędkości. Wektor ***r*** oraz wektor ***v*** zawsze leżą w jednej płaszczyźnie. Powyższe równanie nosi nazwę ***całki momentu pędu***. Równanie to jest efektem tego, że siły działają wzdłuż linii łączącej oba ciała.

<u>**Wniosek:**</u>

ruch w zagadnieniu dwóch ciał odbywa się w płaszczyźnie (orbity)



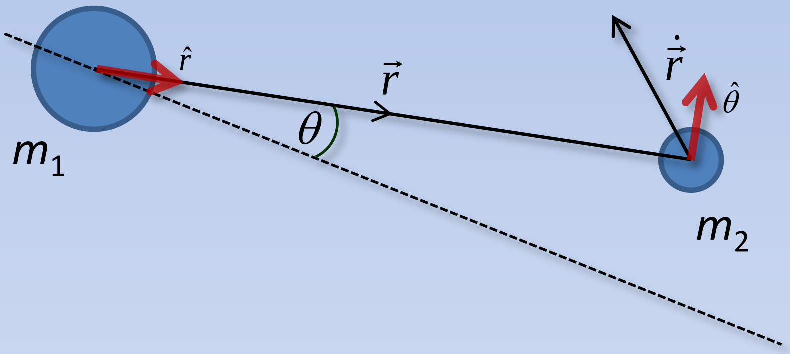
Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Ponieważ ruch jest płaski możemy go dalej rozpatrywać w biegunowym układzie współrzędnych (r, θ) ze środkiem w centrum ciała m_1 (kąt θ mierzony do dowolnie wybranej linii). Wektory położenia, prędkości i przyspieszenia w układzie biegunowym zapisujemy:

$$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right]\hat{\theta}$$

Podstawiając wektor położenia i prędkości do całki momentu pędu otrzymamy:



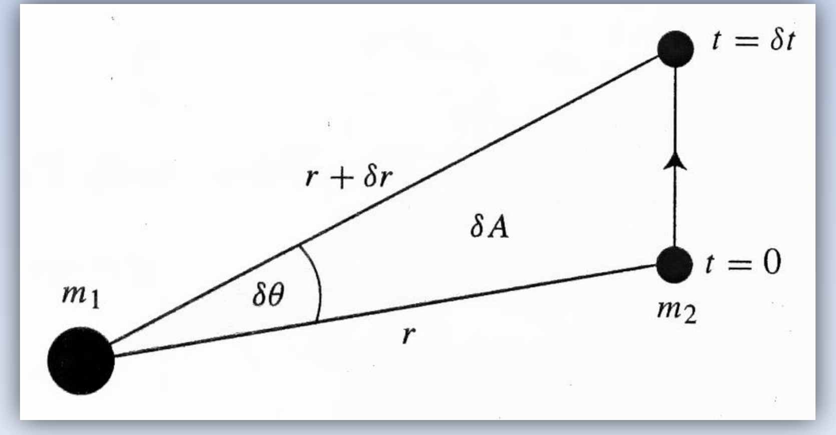
$$r\hat{r} \times \dot{r}\hat{r} + r\hat{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta} = \vec{h} = r^2\dot{\theta}\,\hat{z} \qquad \hat{z} = \hat{r} \times \hat{\theta}$$

$$h = r^2\dot{\theta}$$

Powierzchnia zakreślana przez wektor położenia w czasie δt wynosi:

$$\delta A = \frac{1}{2}r(r+\delta r)\sin(\delta\theta) \approx \frac{1}{2}r^2\delta\theta$$

Dzieląc przez δt i przechodząc do granicy $\delta t \to 0$, otrzymamy:



$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}h\ (= \mathrm{const})$$

czyli **2. prawo Keplera** (obowiązuje dla sił działających wzdłuż linii łączącej dwa ciała)

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Równanie ruchu względnego we współrzędnych biegunowych, dla współrzędnej *r*:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Aby znaleźć zależność $r = r(\theta)$, czyli równanie orbity, podstawiamy $u = 1/r$ i wykorzystujemy wartość całki momenty pędu:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \qquad \ddot{r} = -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

Podstawiając drugie z powyższych równań do równania ruchu względnego otrzymamy:

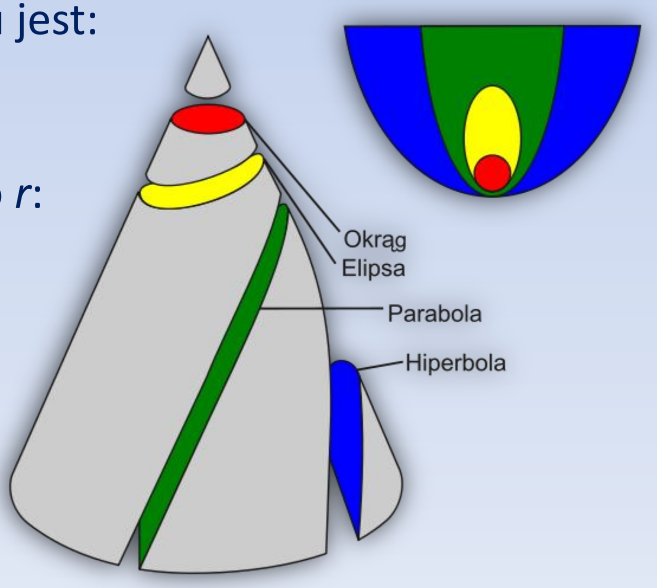
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania różniczkowego 2. rzędu jest:

$$u = \frac{\mu}{h^2}\left[1 + e\cos\left(\theta - \varpi\right)\right]$$

gdzie *e* i ϖ to stałe całkowania (amplituda i faza). Wracając do *r*:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \qquad p = \frac{h^2}{\mu}$$



Powyższe równanie opisuje ***krzywe stożkowe*** (okrąg, elipsa, parabola, hiperbola).

<u>**Wniosek**</u>

Ruch względny odbywa się po jednej z krzywych stożkowych.

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

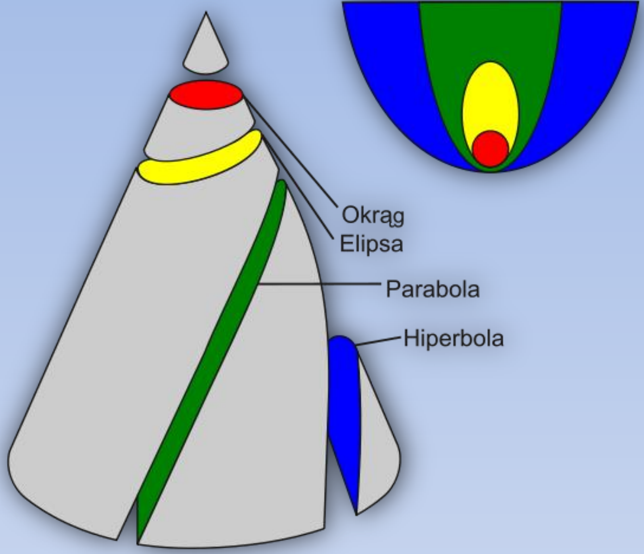
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \qquad p = \frac{h^2}{\mu}$$

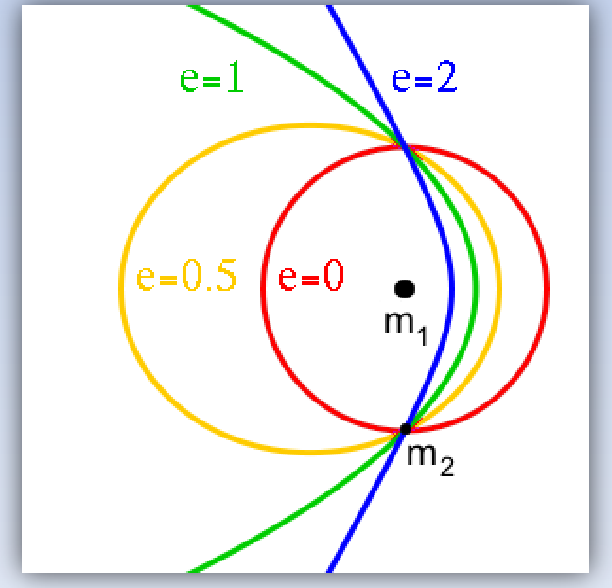
Parametr *p* (semilatus rectum) przyjmuje następujące wartości:

- okrąg $e = 0$ $p = a$
- elipsa $0 < e < 1$ $p = a(1 - e^2)$
- parabola $e = 1$ $p = 2q$
- hiperbola $e > 1$ $p = a(e^2 - 1)$

gdzie:
a - wielka półoś krzywej stożkowej,
q - odległość przy największym zbliżeniu obu ciał,
e - mimośród.

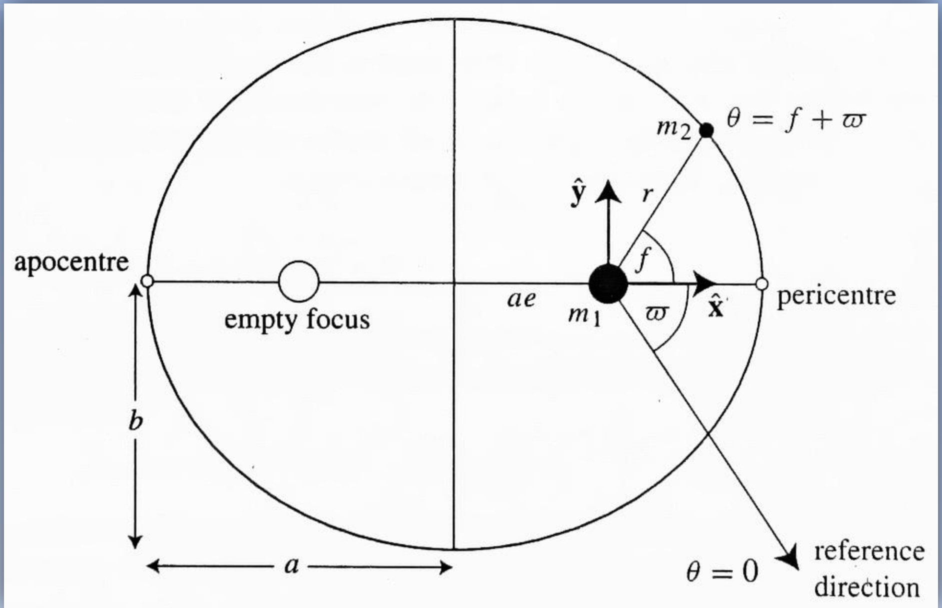
Otrzymane równanie orbity wprowadza i uogólnia **1. prawo Keplera**. Równanie to jest efektem tego, że siła grawitacji działa wzdłuż linii łączącej dwa ciała i jest odwrotnie proporcjonalna do ich wzajemnej odległości.





Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał



W przypadku większości ciał w Układzie Słonecznym mamy do czynienia z orbitami eliptycznymi. Głównie takich orbit dotyczą dalsze rozważania. W tym przypadku:

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos(\theta-\varpi)}$$

Mała półoś orbity eliptycznej *b* wynosi:

$$b^2 = a^2\left(1-e^2\right)$$

Minimalna i maksymalna odległość m_2 od m_1 (r_p - perycentrum i r_a - apocentrum) wynoszą:

$$r_p = a(1-e) \qquad r_a = a(1+e)$$

Definiowane są następujące kąty podające położenie ciała na orbicie:

- θ – długość prawdziwa, względem kierunku odniesienia
- ϖ – długość perycentrum (stały tylko dla 2 ciał)
- f – anomalia prawdziwa podająca położenie ciała drugiego względem perycentrum

Korzystając z anomalii prawdziwej równanie orbity możemy zapisać też jako:

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos f}$$

a położenie ciała *m* we współrzędnych kartezjańskich ze środkiem w masie m_1:

$$x = r\cos f \qquad y = r\sin f$$

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Okres orbitalny *T* to czas w jakim promień wodzący zakreśla powierzchnię całej elipsy (πab). Całkując 2. prawo Keplera otrzymamy:

$$A \equiv \pi ab = \frac{1}{2} hT$$

Wykorzystując równanie dla parametru *p*:

$$p \equiv \frac{h^2}{\mu} = a\left(1-e^2\right)$$

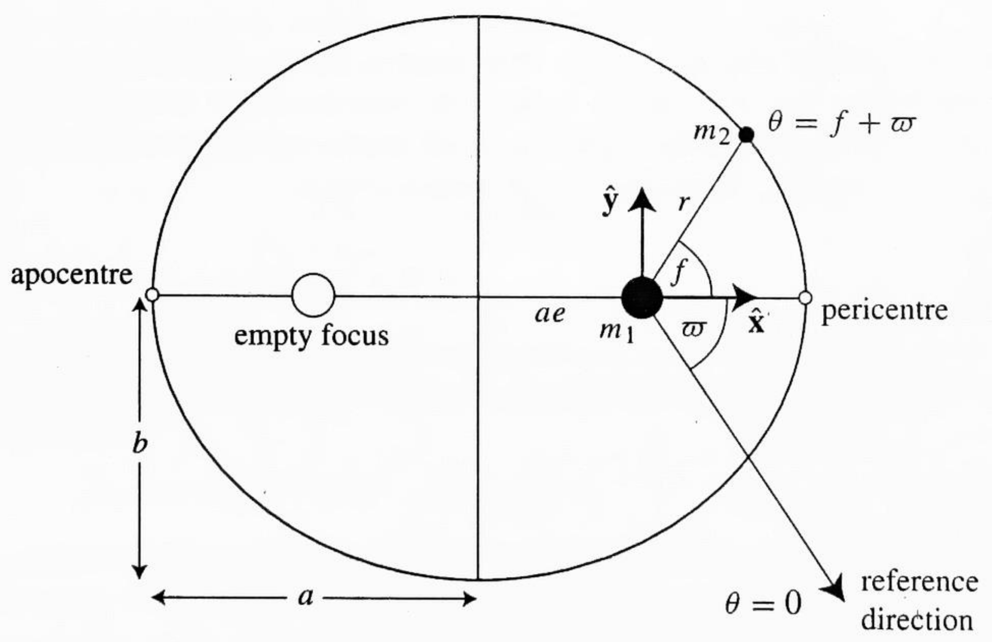
oraz równanie na małą półoś dostajemy:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

lub inaczej

$$G\left(m_1+m_2\right) T^2 = 4\pi^2 a^3$$

czyli **3. prawo Keplera**.



Wniosek:

- *Okres orbitalny nie zależy od mimośrodu, a jedynie od mas i rozmiaru orbity.*
- *3. prawo Keplera pozwala obliczyć masę układu (lub ciała centralnego, gdy $m_2 << m_1$) z obserwowanych parametrów orbity T i a.*

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Prędkość kątowa ciała w ruchu po orbicie zależy od jego położenia. Można jednak zdefiniować wartość tej prędkości uśrednioną po całej orbicie. Ten *ruch średni* wynosi:

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

Korzystając z wzorów na n, T i h możemy zapisać:

$$\mu = n^2 a^3 \qquad h = na^2\sqrt{1-e^2}$$

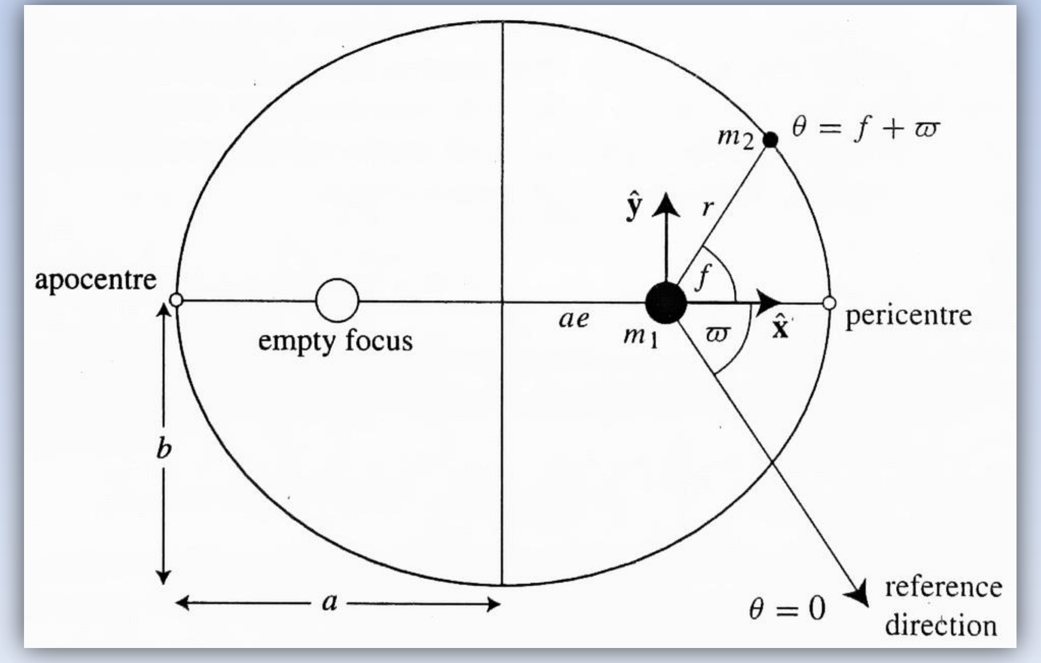
Mnożąc skalarnie $\dot{\boldsymbol{r}}$ i równanie ruchu względnego i używając współrzędnych biegunowych otrzymamy:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0$$

a po scałkowaniu po czasie:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C$$

C jest stałą ruchu w zagadnieniu dwóch ciał tak, jak *h*. Powyższe równanie (**całka energii**) pokazuje **zachowanie energii orbitalnej** w tym zagadnieniu.



Dynamika układu planetarnego

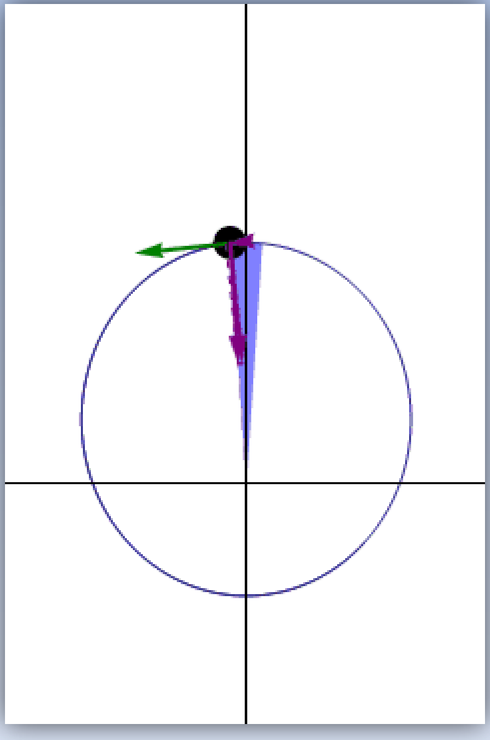
Zagadnienie dwóch ciał

Prędkość ciała w dowolnym punkcie orbity wyznaczamy następująco. Wyznaczamy wartość v^2 we współrzędnych biegunowych:

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \qquad \dot{\theta} = \mathrm{d}(f + \varpi)/\mathrm{d}t = \dot{f}$$

Różniczkujemy równanie orbity i dołączając do niego wyrażenie:

$$\dot{r} = \frac{r \dot{f} e \sin f}{1 + e \cos f} \qquad r^2 \dot{f} = h = na^2 \sqrt{1 - e^2}$$



otrzymamy:

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} e \sin f \qquad r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f)$$

Wstawiając do równania na v^2 otrzymujemy:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

a dla perycentrum i apocentrum:

$$v_p = na \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad v_a = na \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Wektor v we współrzędnych kartezjańskich wyraża się jako:

$$\dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \qquad \dot{y} = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f)$$

Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Łącząc całkę energii z wyrażeniem na wektor prędkości otrzymamy:

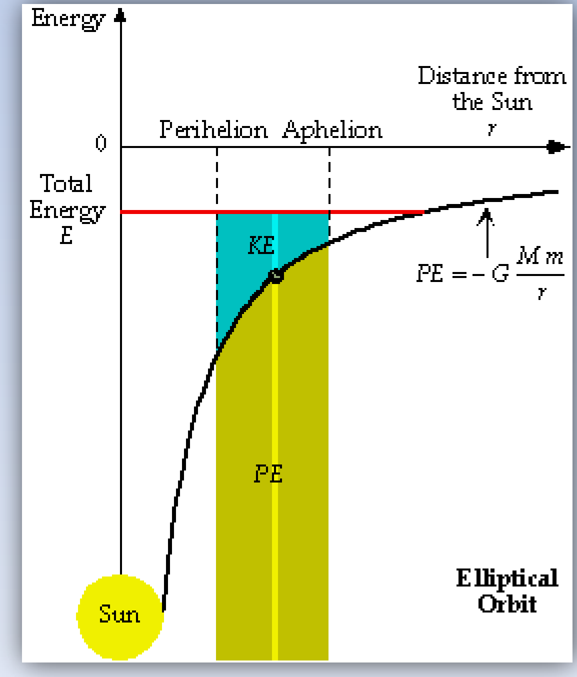
$$C = -\frac{\mu}{2a}$$

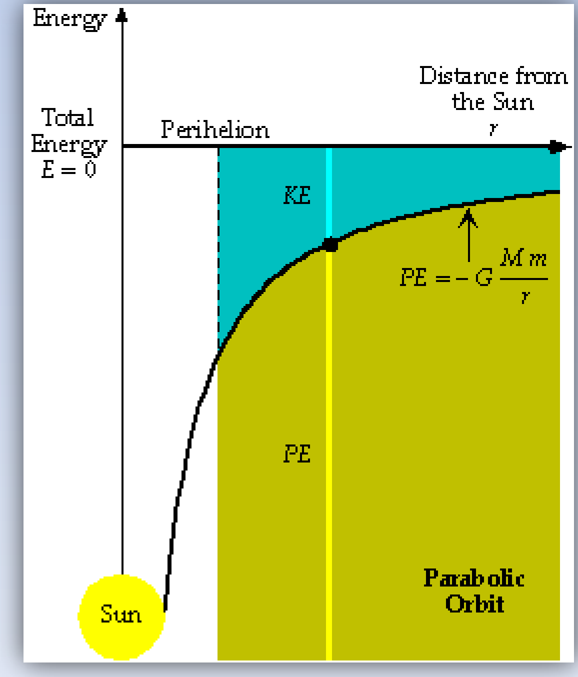
Energia orbitalna jest stała i zależy tylko od wielkiej półosi. Dla orbity eliptycznej jest jednocześnie ujemna – cecha układu związanego.

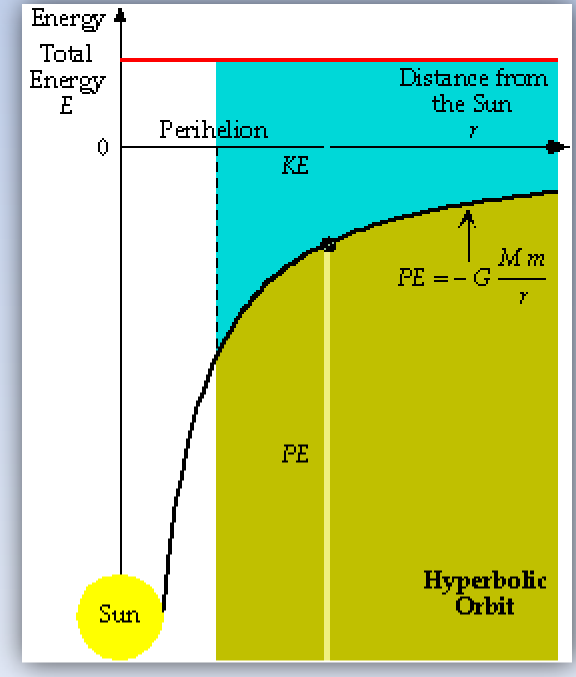
Dla orbity parabolicznej i hiperbolicznej C wynosi:

$$C_{para} = 0 \qquad C_{hiper} = \frac{\mu}{2a}$$

czyli jest równa lub większa od zera – cecha układu niezwiązanego.







Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Podane równania umożliwiają obliczenie odległości od masy centralnej i prędkości ciała, jeśli znamy anomalię *f* (oraz *a* i *e*). Jednak zwykle daną wejściową jest czas (obserwacji), który niestety nie jest wprost obecny w równaniu orbity. Jak *f* zależy od czasu?

Wprowadzamy kąt **anomalię średnią** *M*:

$$M = n\left(t - \tau\right)$$

opartą o ruch średni *n* i czas przejścia przez perycentrum τ. Anomalia *M* nie ma prostej interpretacji geometrycznej. Taką interpretację ma jednak **anomalia mimośrodowa** *E*.

Z rysunku widać, że położenie ciała:

$$x = a\left(\cos E - e\right) \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$$

a stąd

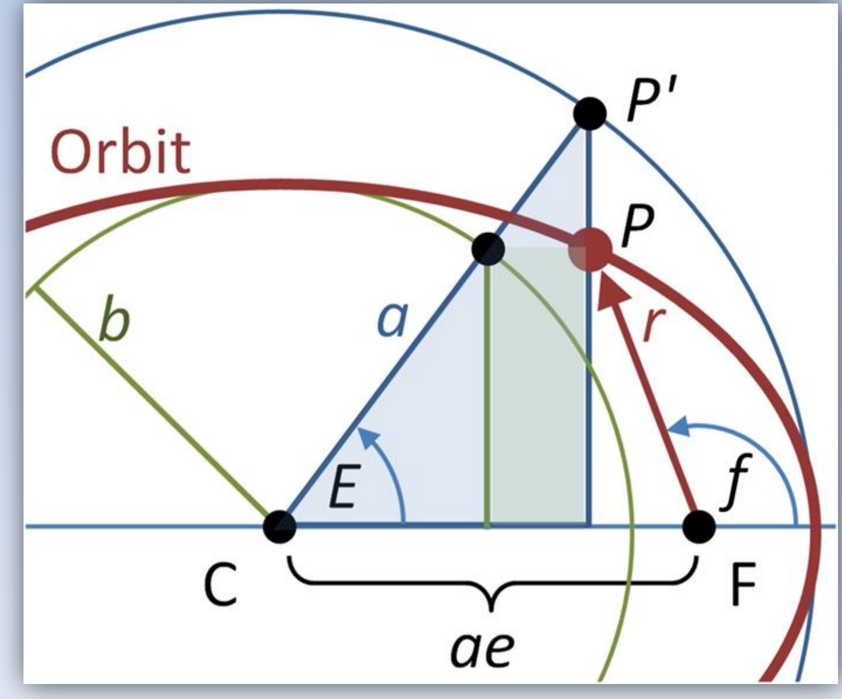
$$r = a\left(1 - e\cos E\right)$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$$

lub

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

Możemy wyznaczyć *f* i *r* jeśli znamy *E*.



Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Zależność między anomalią średnią *M* i anomalią mimośrodową *E* opisuje **równanie Keplera**:

$$M = E - e\sin E$$

Równanie to jest równaniem przestępnym – nie da się je rozwiązać wprost. Można to zrobić metodami numerycznymi.

<u>Metoda stycznych (Newtona)</u>

Szukamy miejsca zerowego funkcji *f(E)*:

$$f(E) = E - e\sin E - M$$

schemat iteracyjny dla metody stycznych:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}$$

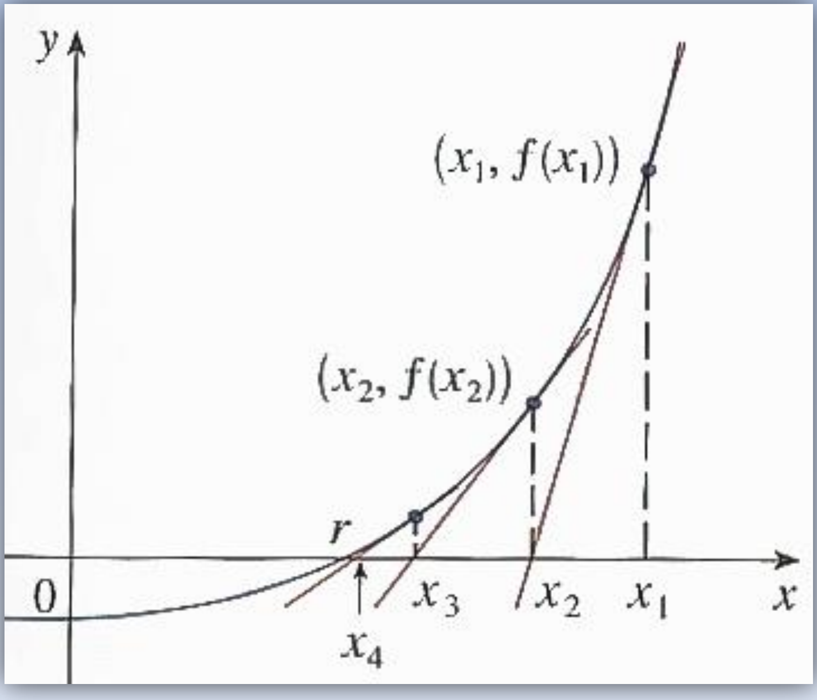
gdzie:

$$f'(E_i) = 1 - e\cos(E_i)$$

Dobrym pierwszym przybliżeniem *E* jest:

$$E_0 = M\,\mathrm{sign}(\sin M)\,ke \qquad 0 \le k \le 1$$

Zalecana wartość *k* to 0.85 (Danby, 1988).

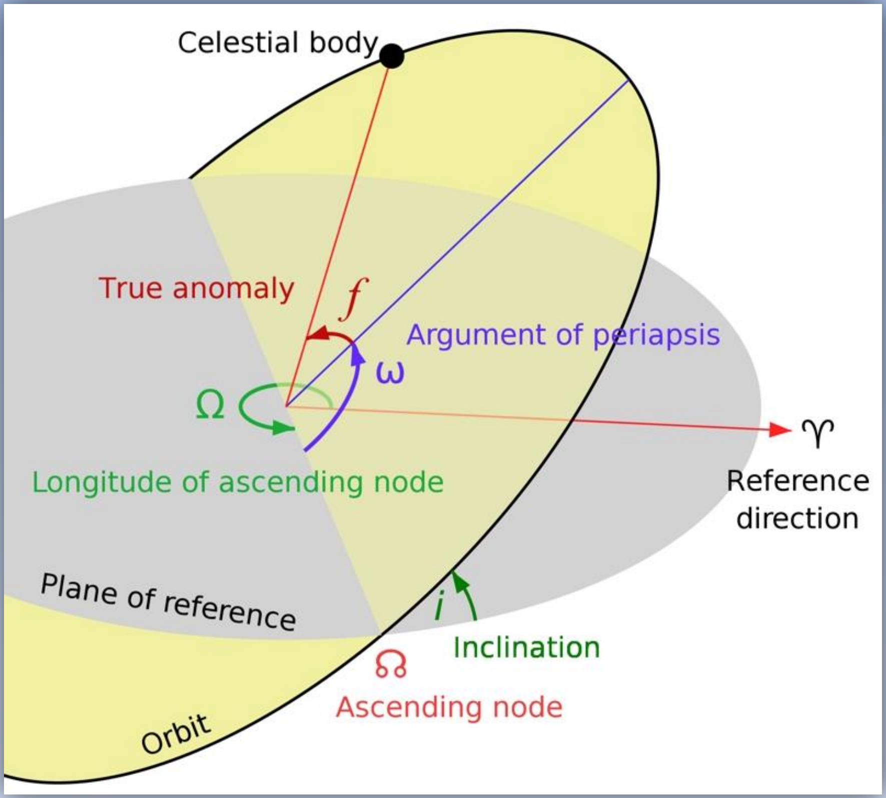


Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Orbitę w zagadnieniu dwóch ciał jednoznacznie opisują następujące parametry:

- ***a*** - wielka półoś (semimajor axis) – opisuje rozmiar orbity
- ***e*** - mimośród (eccentricity) – opisuje kształt orbity
- ***i*** - nachylenie (inclination) – podaje nachylenie orbity do płaszczyzny odniesienia
- **Ω** - długość węzła wstępującego (longitude of the ascending node) – podaje położenie linii węzłów względem kierunku odniesienia
- **ω** - argument perycentrum (argument of periapsis) – określa położenie orbity w jej płaszczyźnie (lub długość perycentrum, $\varpi = \Omega + \omega$)
- ***f*** – anomalia prawdziwa (true anomaly) – określa położenie ciała na orbicie (lub moment przejścia przez perycentrum, t_0)



Sześć parametrów orbity odpowiada wektorom położenia i prędkości ciała (6 składowych).

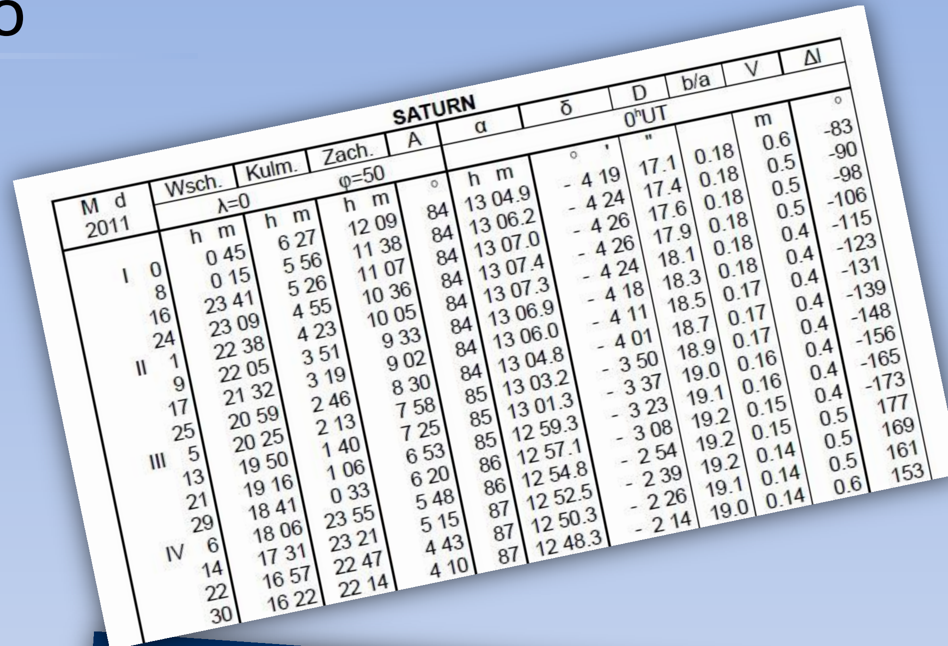
Dynamika układu planetarnego

Zagadnienie dwóch ciał

Wyznaczenie efemerydy dla danego obiektu o znanych parametrach orbity:

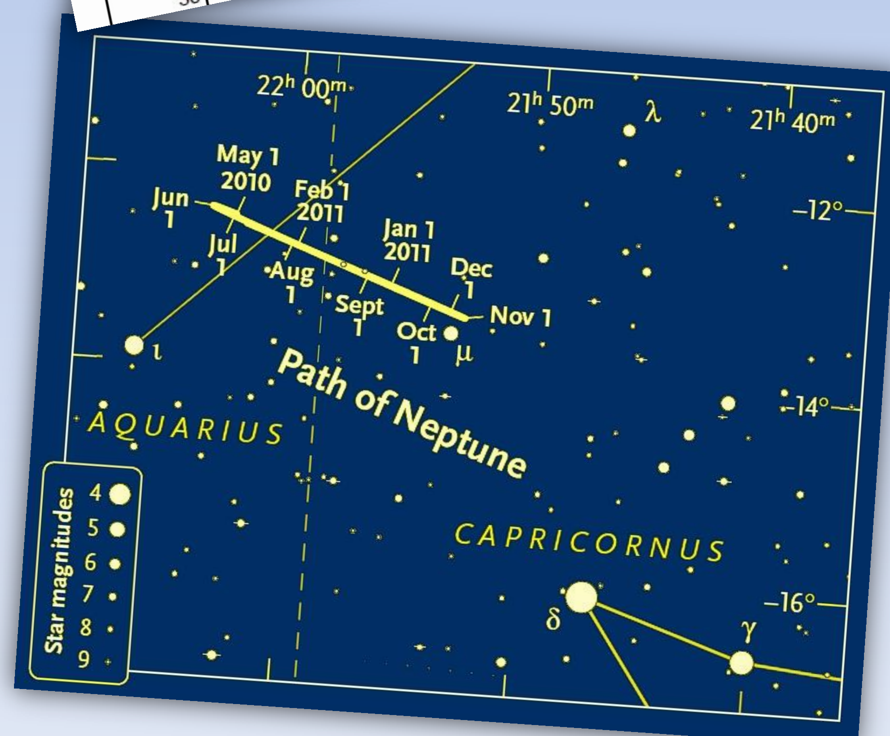
- wyznaczamy heliocentryczne współrzędne kartezjańskie obiektu i Ziemi
- wyznaczamy współrzędne geocentryczne obiektu
- przeliczamy współrzędne geocentryczne na współrzędne ekliptyczne (λ, β) a te na równikowe (α, δ)

Odwrotna procedura pozwoli wyznaczyć parametry orbitalne nowoodkrytego ciała. Do tego potrzebna jest więcej niż jedna obserwacja położenia ciała na niebie (szukamy 6 parametrów).



SATURN

M d 2011	Wsch.	Kulm.	Zach.	A	α	δ	D	b/a	V	ΔI
	λ=0		φ=50		0^{h}UT					
	h m	h m	h m	°	h m	° '	"		m	°
I 0	0 45	6 27	12 09	84	13 04.9	- 4 19	17.1	0.18	0.6	-83
8	0 15	5 56	11 38	84	13 06.2	- 4 24	17.4	0.18	0.5	-90
16	23 41	5 26	11 07	84	13 07.0	- 4 26	17.6	0.18	0.5	-98
24	23 09	4 55	10 36	84	13 07.4	- 4 26	17.9	0.18	0.5	-106
II 1	22 38	4 23	10 05	84	13 07.3	- 4 24	18.1	0.18	0.4	-115
9	22 05	3 51	9 33	84	13 06.9	- 4 18	18.3	0.18	0.4	-123
17	21 32	3 19	9 02	84	13 06.0	- 4 11	18.5	0.17	0.4	-131
25	20 59	2 46	8 30	84	13 04.8	- 4 01	18.7	0.17	0.4	-139
III 5	20 25	2 13	7 58	85	13 03.2	- 3 50	18.9	0.17	0.4	-148
13	19 50	1 40	7 25	85	13 01.3	- 3 37	19.0	0.16	0.4	-156
21	19 16	1 06	6 53	85	12 59.3	- 3 23	19.1	0.16	0.4	-165
29	18 41	0 33	6 20	86	12 57.1	- 3 08	19.2	0.15	0.4	-173
IV 6	18 06	23 55	5 48	86	12 54.8	- 2 54	19.2	0.15	0.5	177
14	17 31	23 21	5 15	87	12 52.5	- 2 39	19.2	0.14	0.5	169
22	16 57	22 47	4 43	87	12 50.3	- 2 26	19.1	0.14	0.5	161
30	16 22	22 14	4 10	87	12 48.3	- 2 14	19.0	0.14	0.6	153



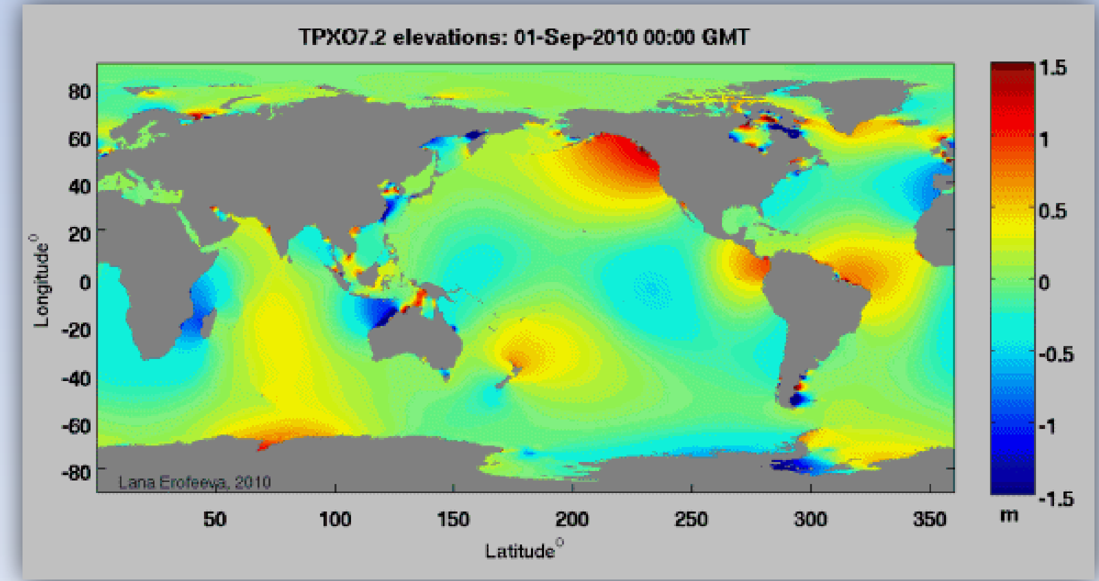
Dynamika układu planetarnego

Pływy

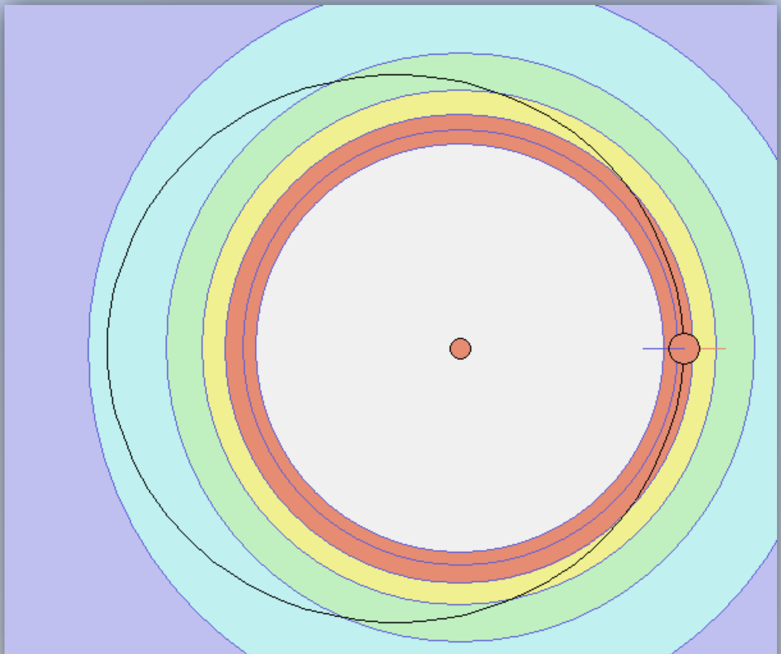
Siła grawitacji działająca na różne części danego ciała od innych obiektów różni się. Różnice te powodują powstanie siły pływowej.

Siła ta może zmienić kształt ciała, jego ruch obrotowy, powodować trzęsienia i grzanie jego wnętrza oraz podnoszenie i opadanie powierzchni, zbiorników cieczy i atmosfery. W skrajnym przypadku, gdy siła pływowa przewyższy siły wiążące ciało w całość, może ono ulec rozpadowi.

erupcja wulkanu na Io



Pływy morskie na Ziemi (składowa M2, dane z TOPEX/Poseidon)
animacja: https://i.stack.imgur.com/N3FBf.gif



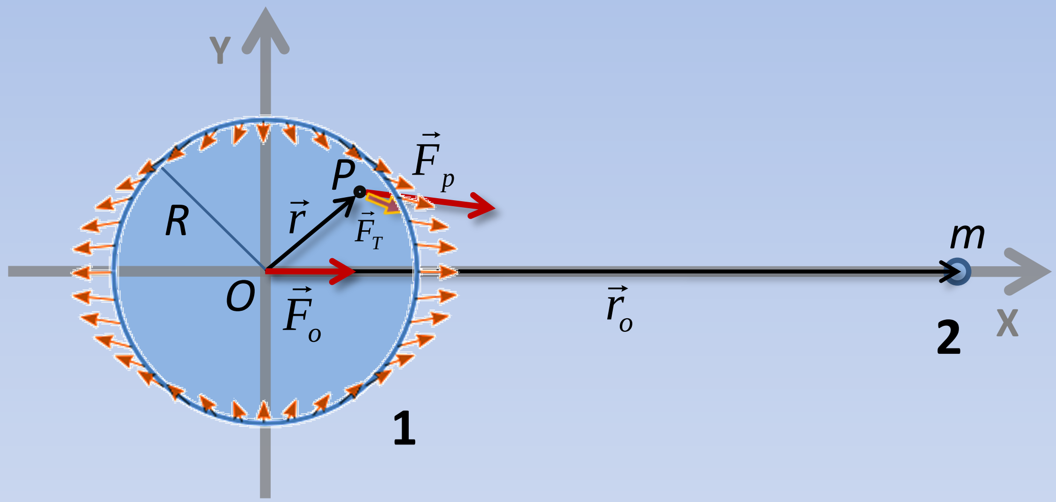
Rezonans orbita-obrót dla Merkurego, animacja:
https://qph.cf2.quoracdn.net/main-qimg-acb1661ef33f73d7aa9f2c220bc2cffa

Dynamika układu planetarnego

Pływy

Ciało 1 o promieniu ***R*** podlega sile grawitacji **ciała 2** o masie ***m*** odległego o $\boldsymbol{r_o}$ ($\boldsymbol{r_o \gg R}$). Siła pływowa $\boldsymbol{F_T}$ działająca w punkcie ***P*** o masie δm jest różnicą przyciągania grawitacyjnego w tym punkcie i w środku ciała 1 (***O***) wywieranego przez ciało 2. (siła F_T jest więc definiowana względem środka ciała 1)

$$\vec{F}_T(\vec{r}) = -\frac{G\,m\,\delta m}{\left|\vec{r}_o - \vec{r}\right|^3}(\vec{r}_o - \vec{r}) + \frac{G\,m\,\delta m}{r_o^3}\vec{r}_o$$



Dla punktów leżących na osi X mamy:

$$\vec{F}_T(x) = -\frac{G\,m\,\delta m}{(x_o - x)^2} + \frac{G\,m\,\delta m}{x_o^2}$$

lub po wykorzystaniu wzoru Taylora:

$$F_T(x) = -\frac{G\,m\,\delta m}{x_o^2} + \frac{G\,m\,\delta m}{x_o^2}\frac{2x}{x_o} - \frac{G\,m\,\delta m}{x_o^2}\left(\frac{3x}{x_o}\right)^2 + \ldots + \frac{G\,m\,\delta m}{x_o^2}$$

Zaniedbując wyrazy rzędu $(x/x_o)^2$ i wyższe otrzymamy (na jednostkę masy):

$$F_T(x) = \frac{2G\,m\,x}{x_o^3}$$

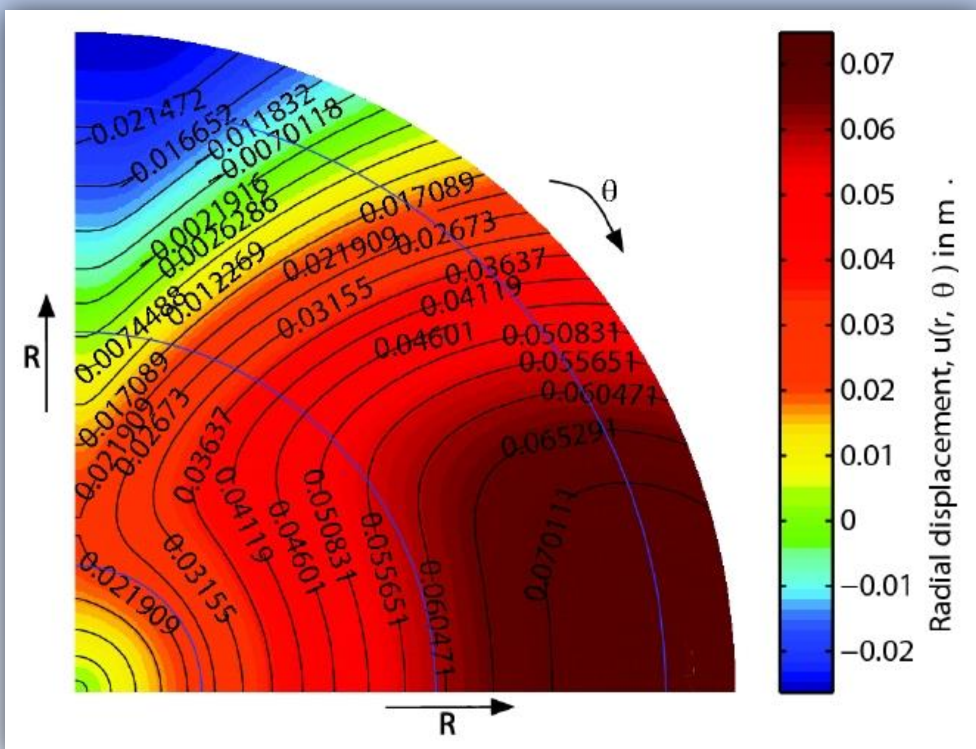
Siła (przyspieszenie) pływowa zależy od odległości od środka ciała zaburzanego oraz od masy i odległości do ciała zaburzającego. Zwrot siły dla $x > 0$ jest przeciwny niż dla $x < 0$.

Dynamika układu planetarnego

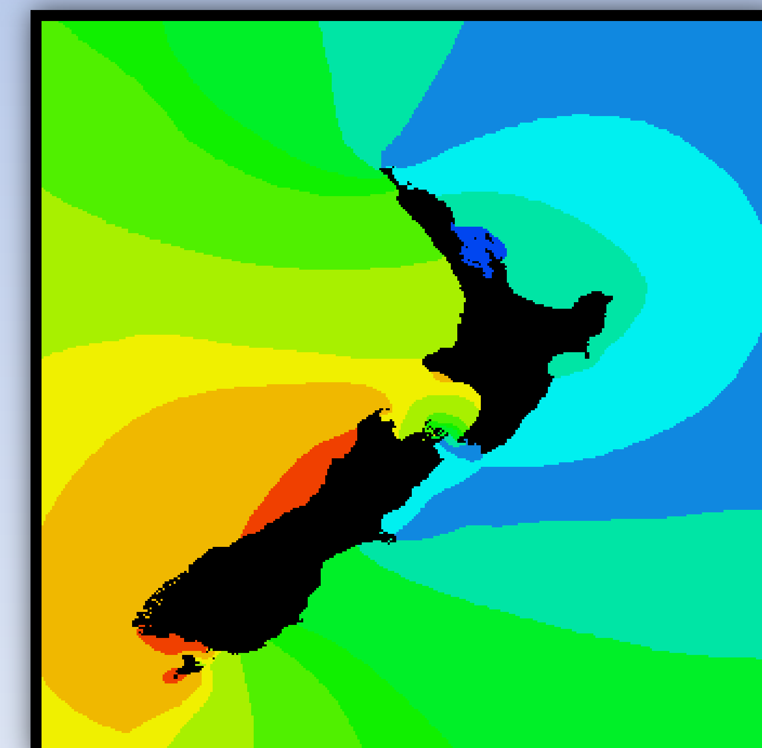
Pływy

Siły pływowe powodują deformację ciała. Kształt ciała osiąga stan równowagowy wynikający z działania własnej siły grawitacji, własnej rotacji, wytrzymałości materiału z którego jest ono zbudowane oraz działających sił pływowych.

Deformacji pływowej podlega też atmosfera i zbiorniki cieczy (np. pływy morskie na Ziemi).



Pływowa deformacja Ziemi (składowa radialna). Obliczenia teoretyczne. `

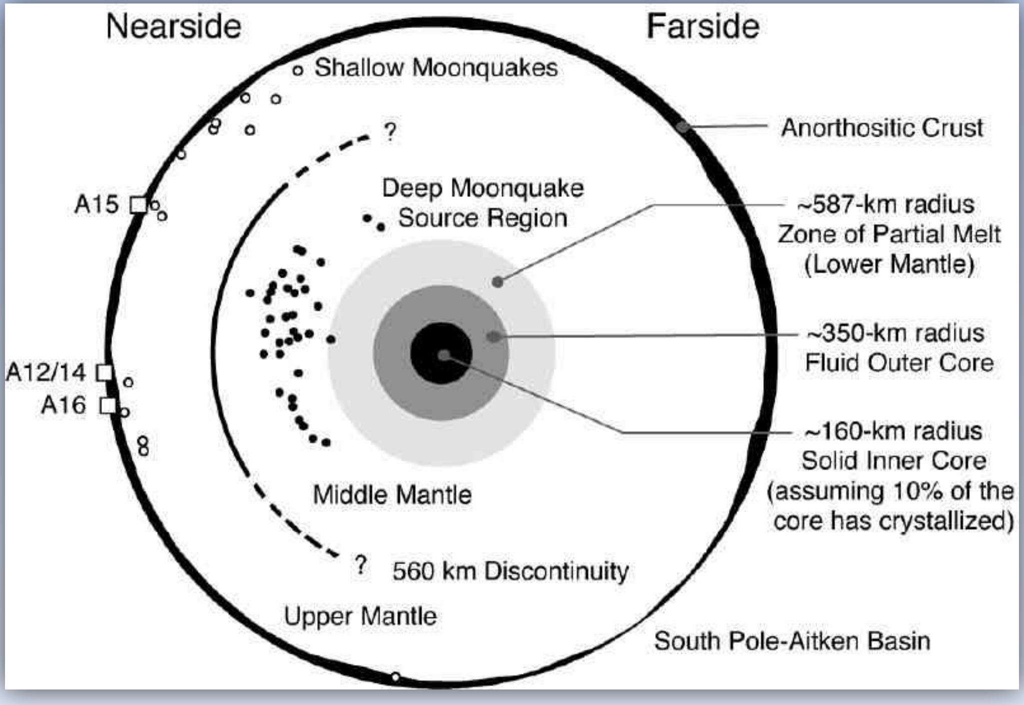


Pływy morskie wokół Nowej Zelandii
(składowa M2, dane z TOPEX/Poseidon, animacja 2 slajdy wcześniej)

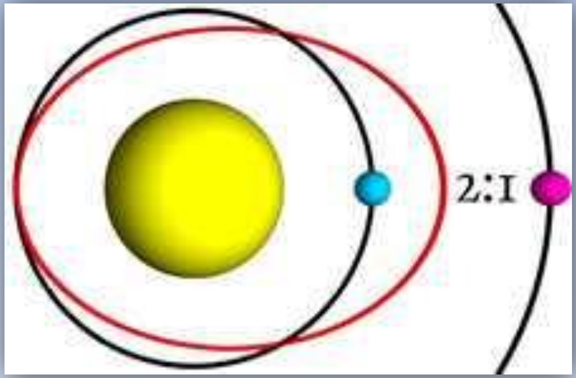
Dynamika układu planetarnego

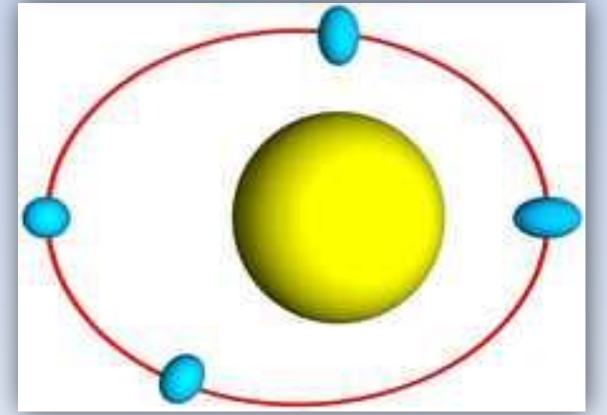
Pływy

- **Deformacja pływowa** może powodować trzęsienia. Wykryto takie trzęsienia na Księżycu.
- Jeśli cało porusza się po orbicie eliptycznej względem źródła sił pływowych, deformacja pływowa cyklicznie zmienia się, co może prowadzić do intensywnego grzania wnętrza tego ciała (ciągłe „ugniatanie”). **Grzanie pływowe** odpowiada za wysoką aktywność wulkaniczną Io.



Budowa wewnętrzna Księżyca odczytana z trzęsień księżycowych. Trzęsienia głębokie (700-1000 km) powodowane są przez pływy





Powstawanie deformacji pływowej Io

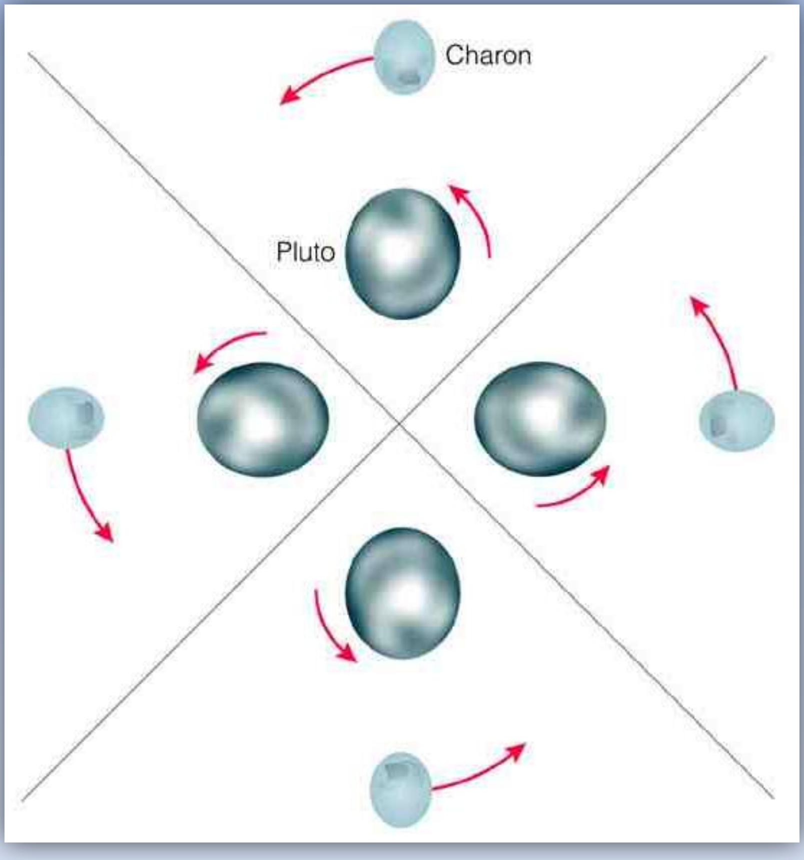
Dynamika układu planetarnego

Pływy

Deformacja pływowa może wpływać na ruch obrotowy ciała. W układzie dwóch ciał, pływy zmieniają ich prędkość rotacji wokół własnej osi oraz wokół barycentrum. W dłuższym czasie pływy mogą doprowadzić jedno lub oba ciała do rotacji synchronicznej.

Zjawisko wywoływane jest przez **pływowy moment siły**, który powoduje „przepływ” momentu pędu między ruchami obrotowymi i obiegowymi (całkowity moment pędu układu pozostaje zachowany).

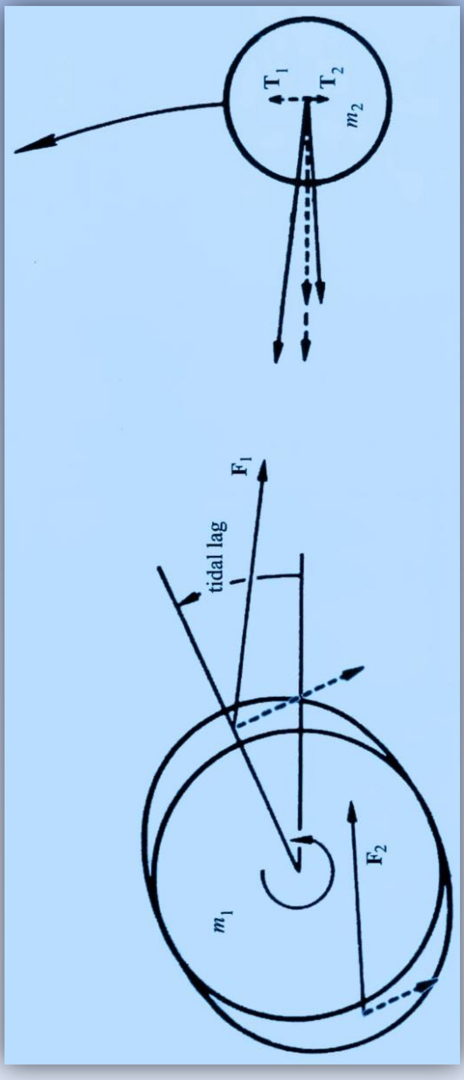
Pływowy moment siły pojawia się, gdy wybrzuszenia pływowe nie są położone dokładnie na linii łączącej oba ciała (efekt „unoszenia” wybrzuszeń przez rotację i skończonego czasu reakcji ciała na deformację pływową).



Pełna blokada pływowa w układzie Pluton – Charon (okresy obrotu równe okresowi obiegu)

Dynamika układu planetarnego

Pływy

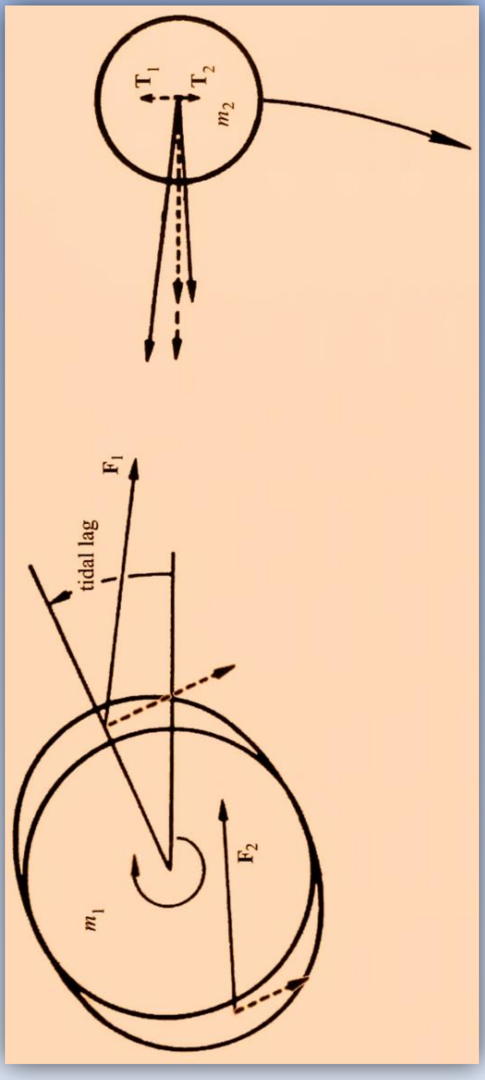


- **Pływowy moment siły – wariant ziemsko-księżycowy:** planeta obraca się szybciej niż obieg satelity (rys. po lewej).

  Wybrzuszenia pływowe wyprzedzają księżyc a siły grawitacyjne z nimi związane powodują zwiększanie orbitalnego momentu pędu księżyca (wzrost odległości) i zmniejszanie obrotowego momentu pędu planety (hamowanie obrotu).

- **Pływowy moment siły – wariant marsjańsko-fobosowy:** planeta obraca się wolniej niż obieg satelity (rys. po prawej).

  Księżyc wyprzedza wybrzuszenia pływowe a siły grawitacyjne z nimi związane powodują zmniejszanie orbitalnego momentu pędu księżyca (spadek odległości) i zwiększanie obrotowego momentu pędu planety (przyspieszanie obrotu).



Dynamika układu planetarnego

Granica Roche'a

Wartość siły pływowej silnie zależy do odległości (~1/r^3). W pewnej odległości od ciała centralnego siły pływowe działające na satelitę mogą przewyższyć siły wiążące go w całość (własna siła grawitacji, wytrzymałość materiału) prowadząc do rozpadu satelity.

Rozważmy sferyczny księżyc (*m*, *r*) obiegający planetę (*M*, *R*) po orbicie kołowej (*d*) i obracający się synchronicznie. Księżyc wiązany jest w całość tylko przez własną grawitację. Siła grawitacji działająca na fragment o masie δm wynosi:

$$F_g = \frac{G\, m\, \delta m}{r^2}$$

a siła pływowa:

$$F_t = \frac{2G\, M\, \delta m\, r}{d^3}$$

Wyznaczamy odległość na której obie siły równoważą się (**granica stabilności Roche'a**):

$$d_R = \left(2\frac{M}{m}\right)^{1/3} r$$

lub zamieniając masy ciał na ich gęstości:

$$d_R = \left(2\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R$$

Dynamika układu planetarnego

Granica Roche'a

Położenie granicy Roche'a nie jest ściśle określone i zależy od materiału budującego satelitę. Dla obiektu zbudowanego z materii plastycznej:

$$d_R = 2.45R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}$$

W przypadku małych księżyców (≈<100 km) wytrzymałość materiałowa może przewyższać siłę własnej grawitacji umożliwiając im obieganie planety wewnątrz strefy Roche'a.

Istnienie strefy Roche'a wyjaśnia dlaczego blisko planet obserwujemy tylko pierścienie i małe księżyce a duże księżyce występują wyłącznie na większych odległościach.

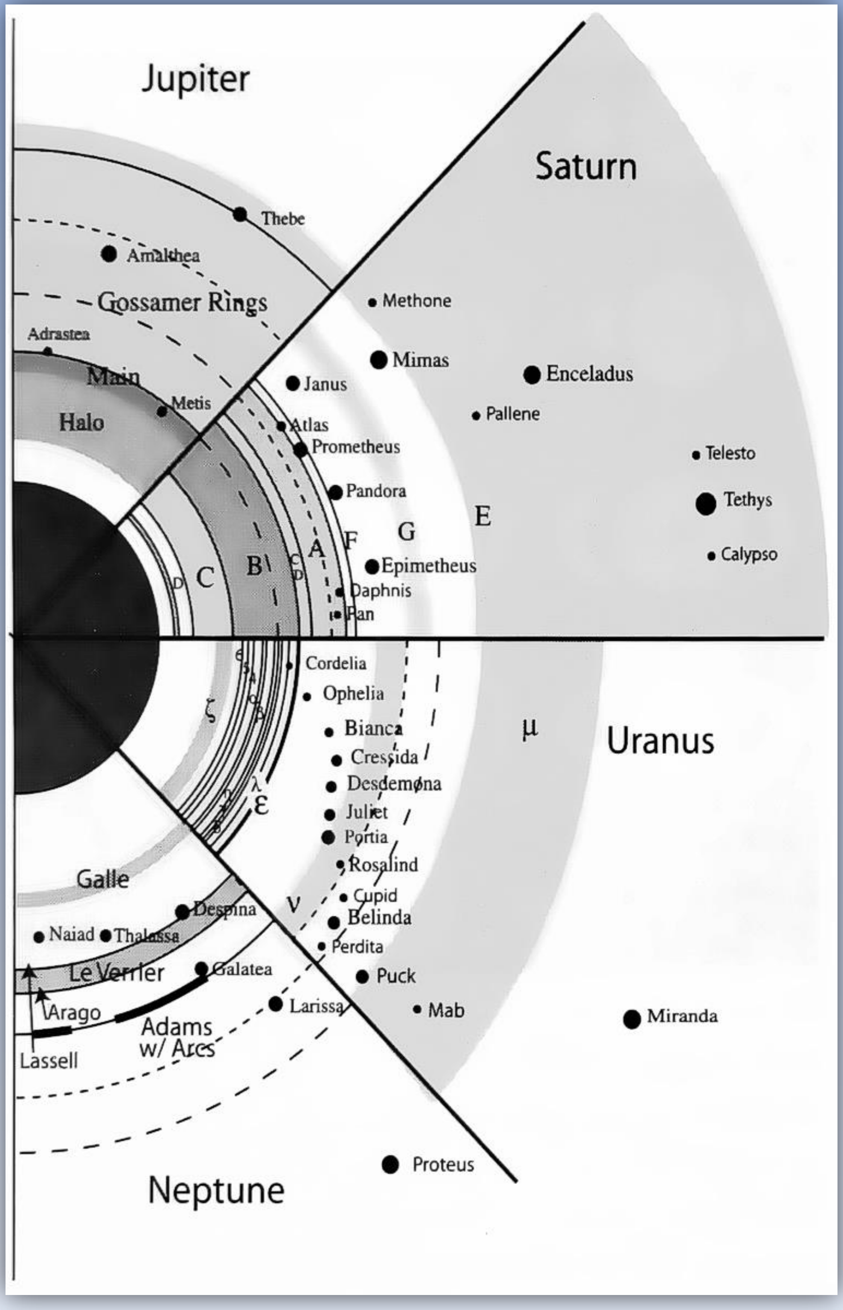


Diagram pierścieni i wewnętrznych księżyców planet olbrzymów. Diagram przeskalowany promieniem równikowym planety. Linia przerywana długa oznacza odległość, na której okres orbitalny równy jest okresowi obrotu planety. Linia przerywana krótka oznacza granicę Roche'a dla ciał o gęstości 1 g/cm^3.