

PULSACJE GWIAZDOWE

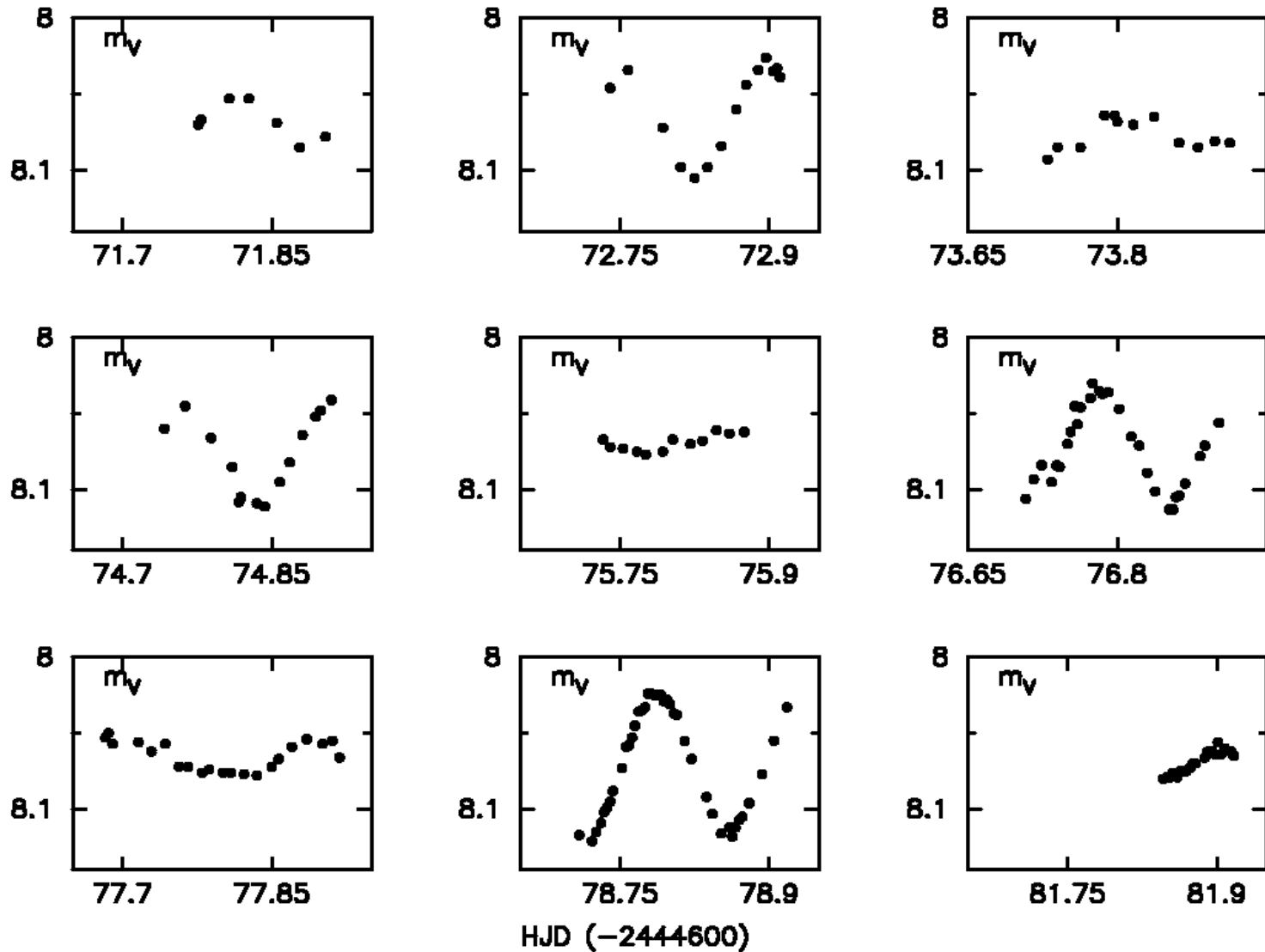
semestr zimowy 2019/2020

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

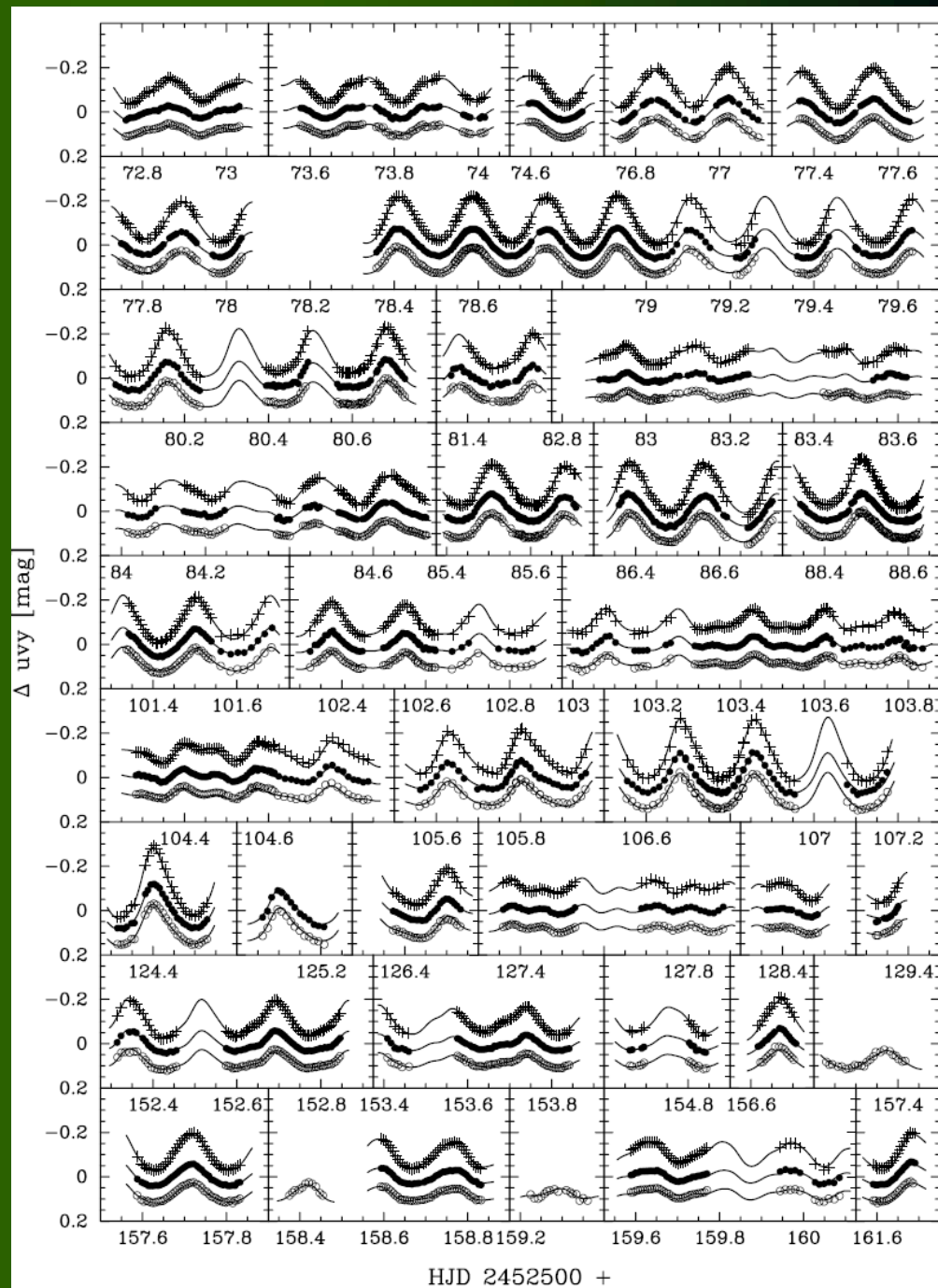
WYKRYWANIE GWIAZD PULSUJĄCYCH

- zmiany **jasności** w różnych pasmach i kolorach
i/lub
- zmiany **profilu** linii widmowych

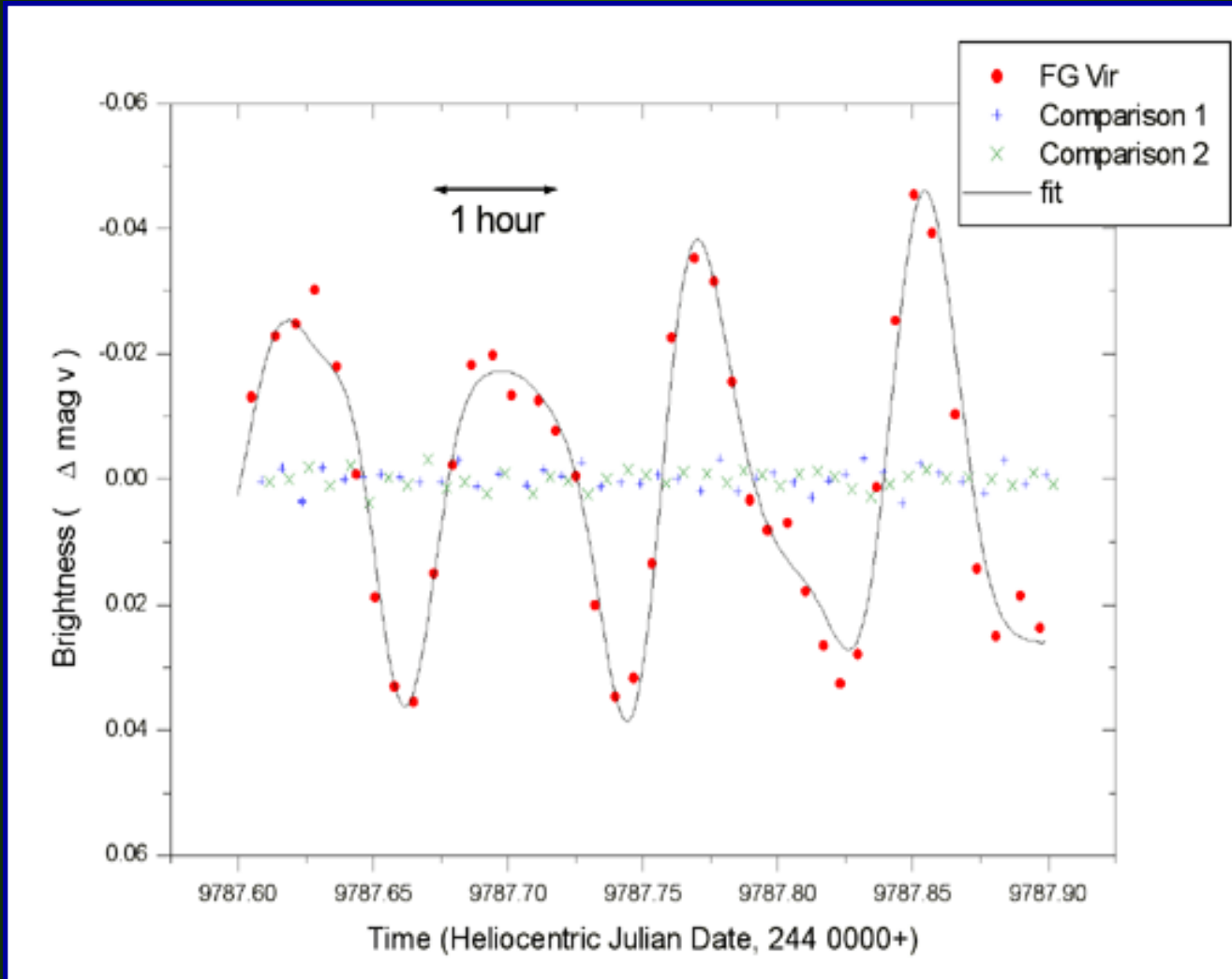
Zmiany jasności gwiazdy HD129929 (β Cep) w filtrze V (Geneva) z 11 kolejnych dni. Widać zjawisko dudnienia.



**Krzywe blasku ν Eridani
w pasmach Strömngrena uvy
Handler et al. (2004)**



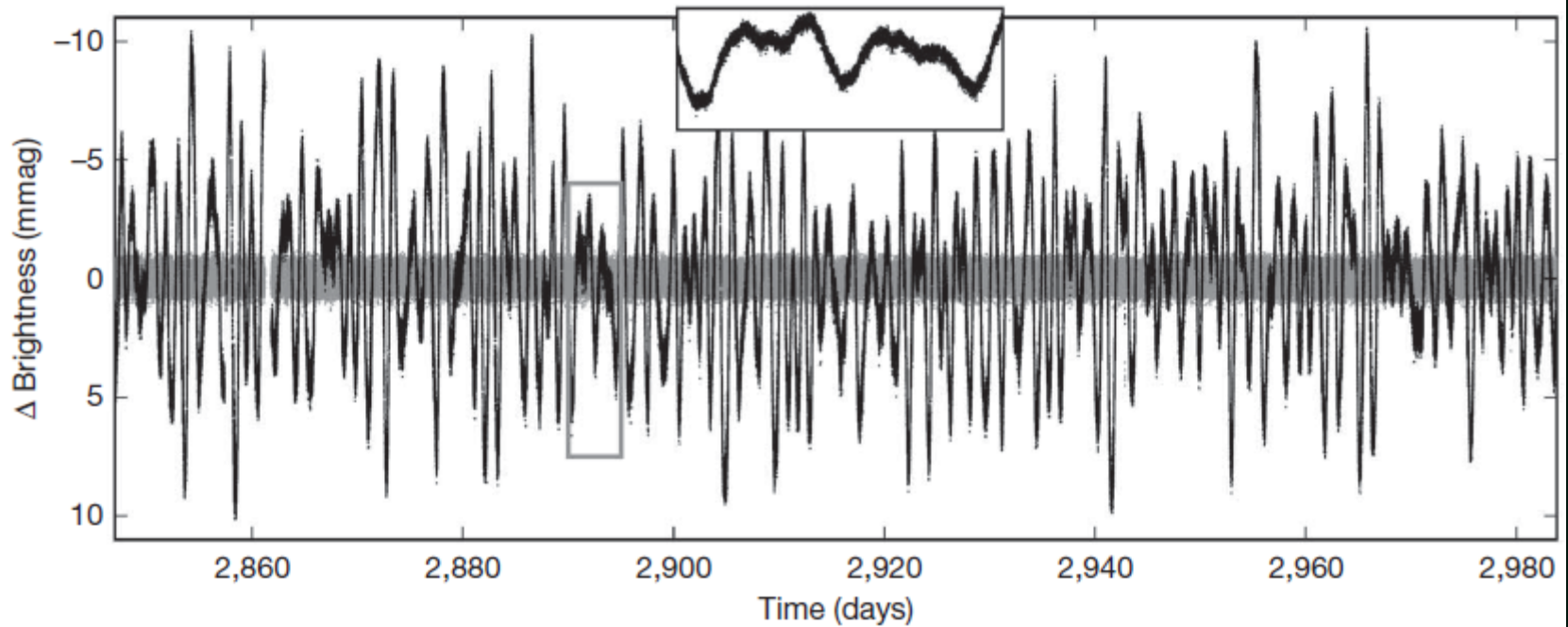
FG Vir



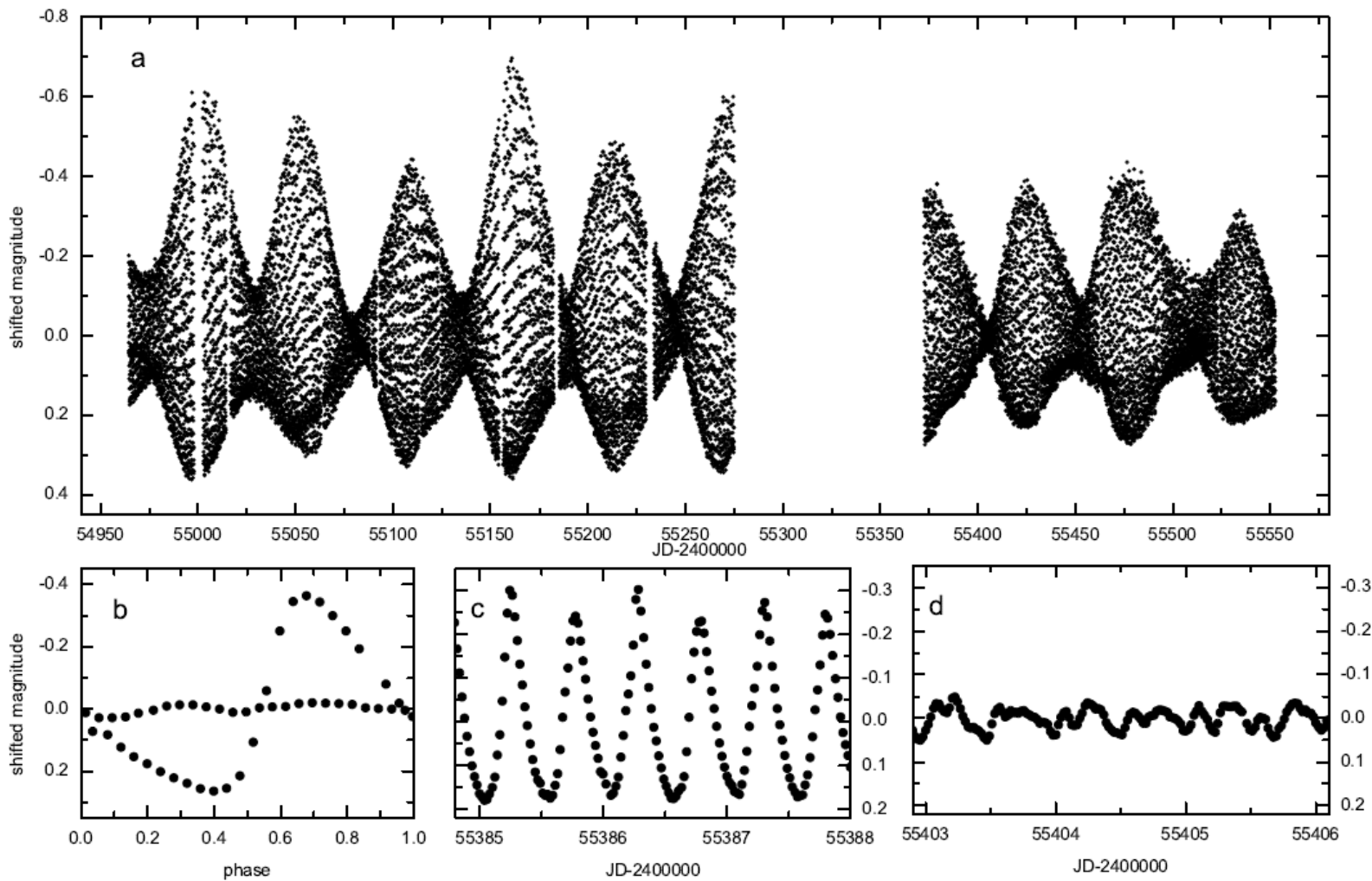
HD50230

Krzywa basku z CoRoT

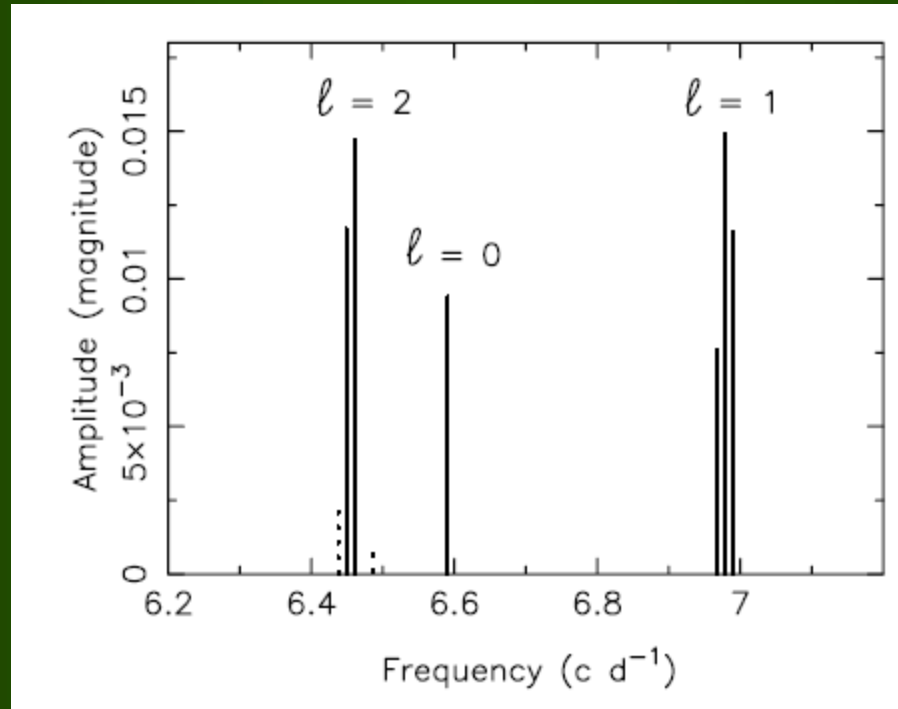
Szara linia – residua po odjęciu około 550 częstotliwości



V445 Lyr (KIC 6186029), fotometria Keplera Q1 - Q7

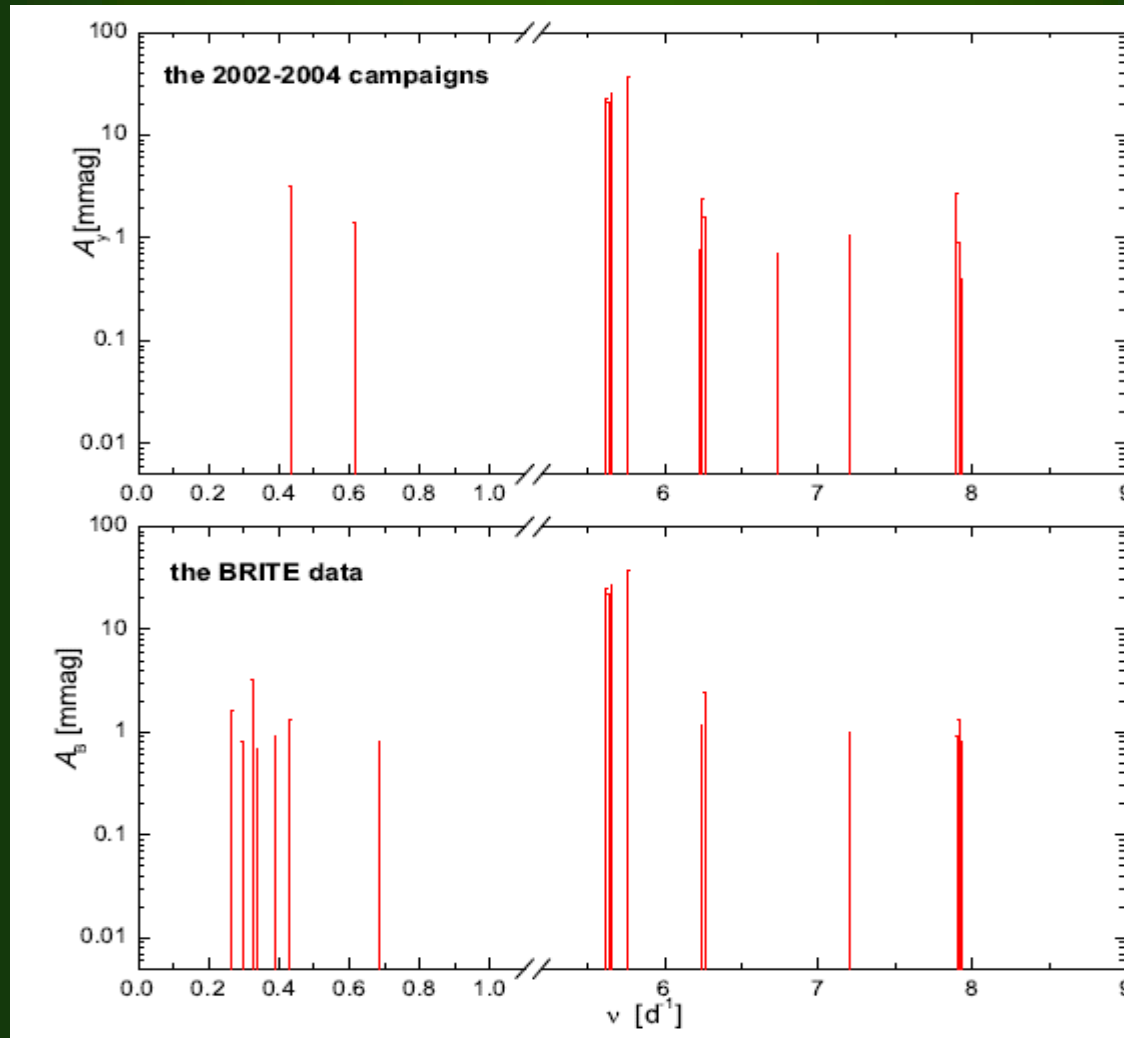


Widmo amplitudowe dla HD129929 (β Cep)



ν Eridani – wielomodalna gwiazda typu β Cephei

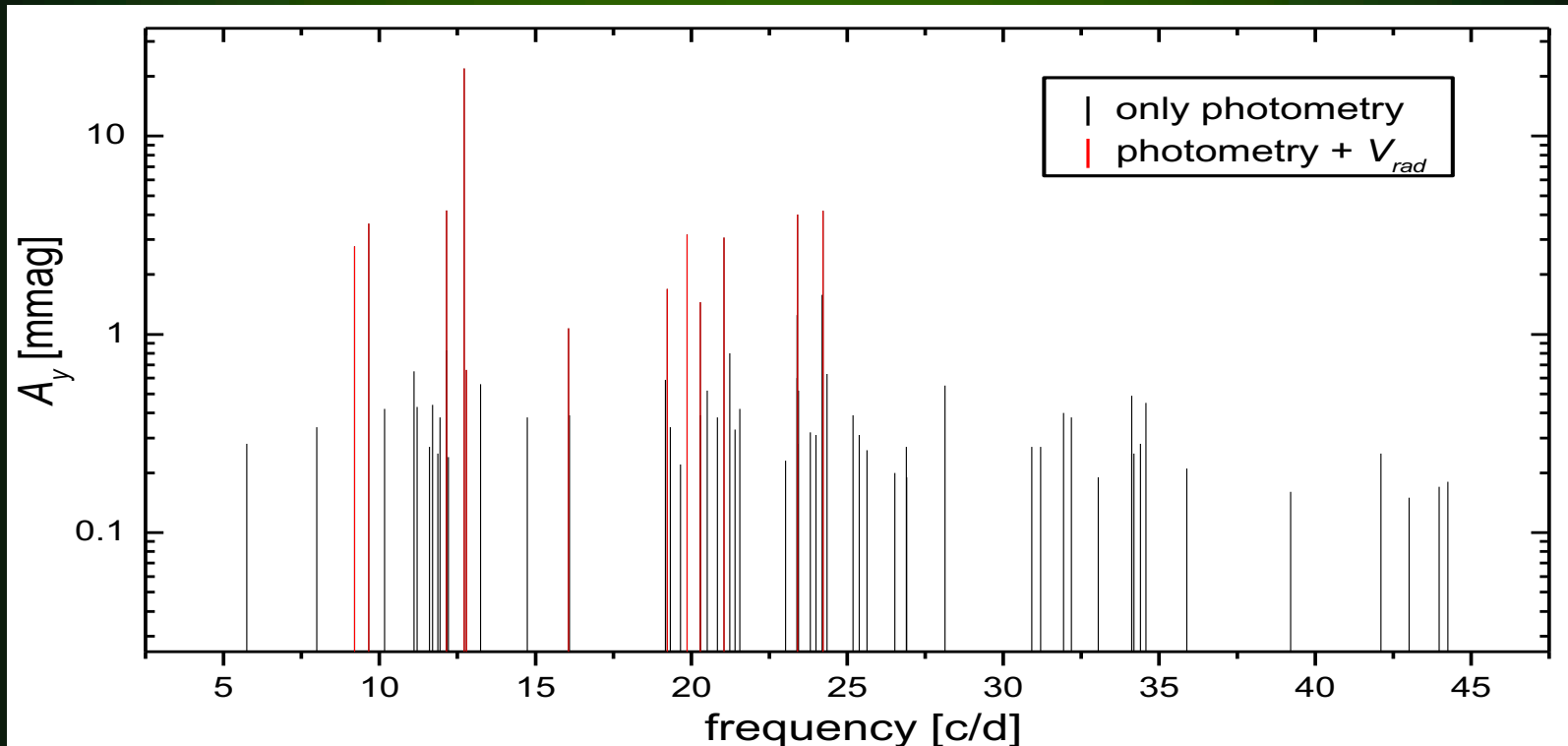
17 niezależnych częstotliwości



Dwie kampanie fotometryczne i jedna spektroskopowa: Handler et al. 2004, MNRAS 347, 454,
Aerts et al. 2004, MNRAS 347, 463, Jerzykiewicz et al., 2005, MNRAS 360, 619
Dane BRITE: Handler et al. (2017)

FG Vir – wielomodalna gwiazda typu δ Scuti

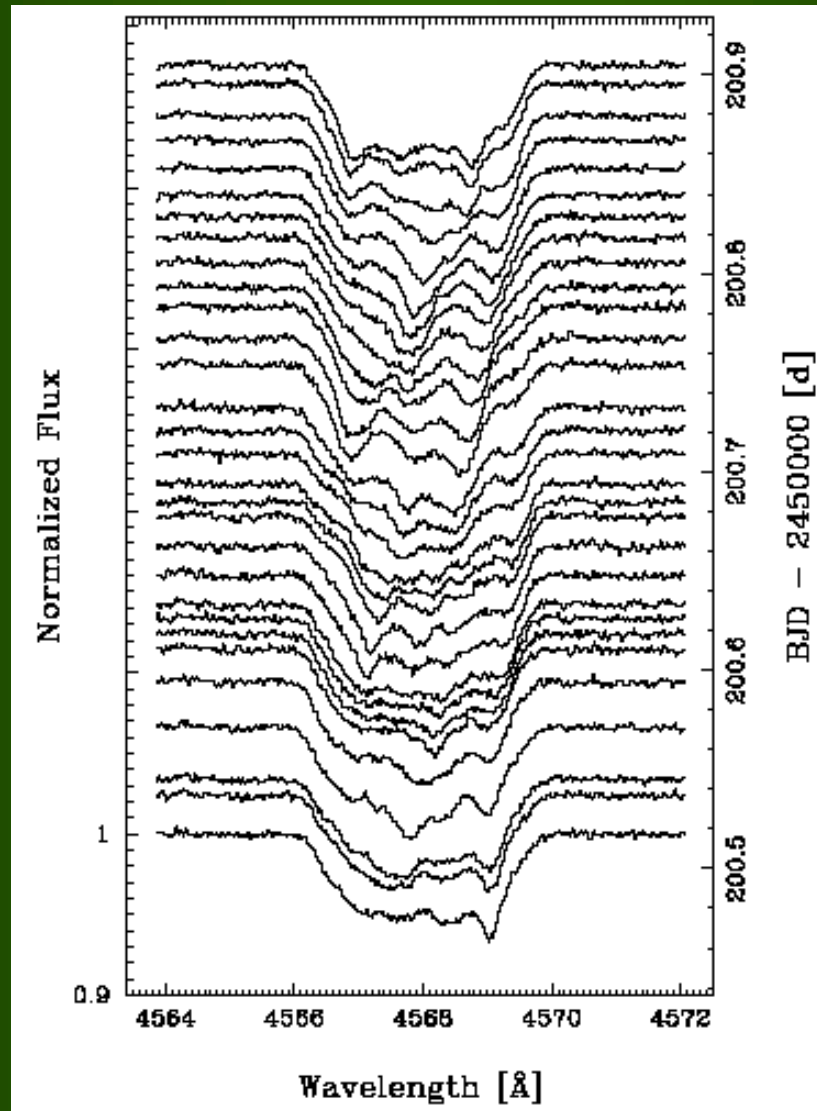
67 niezależnych częstotliwości



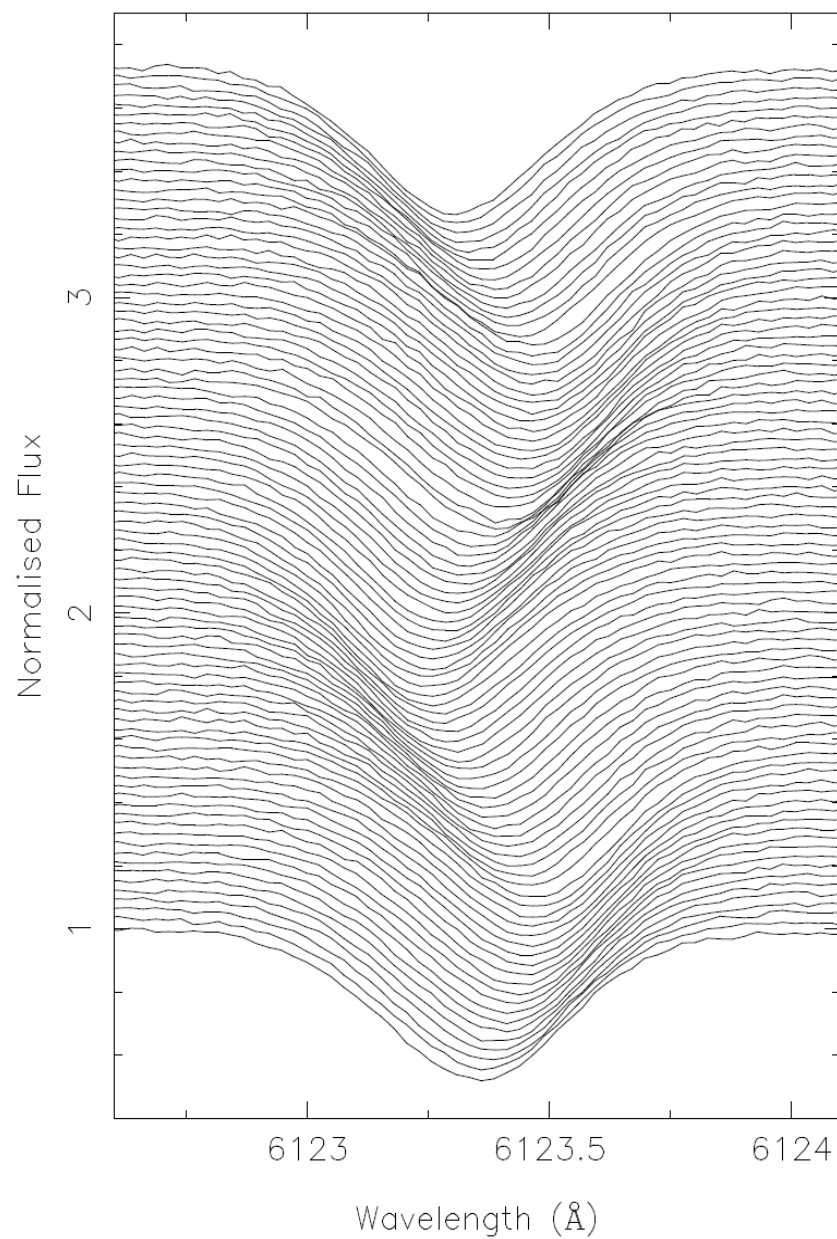
Widmo amplitudowe gwiazdy HD 50230 (B3V) z danych CoRoT. Około 550 niezależnych częstotliwości

 Nie można obecnie wyświetlić tego obrazu.

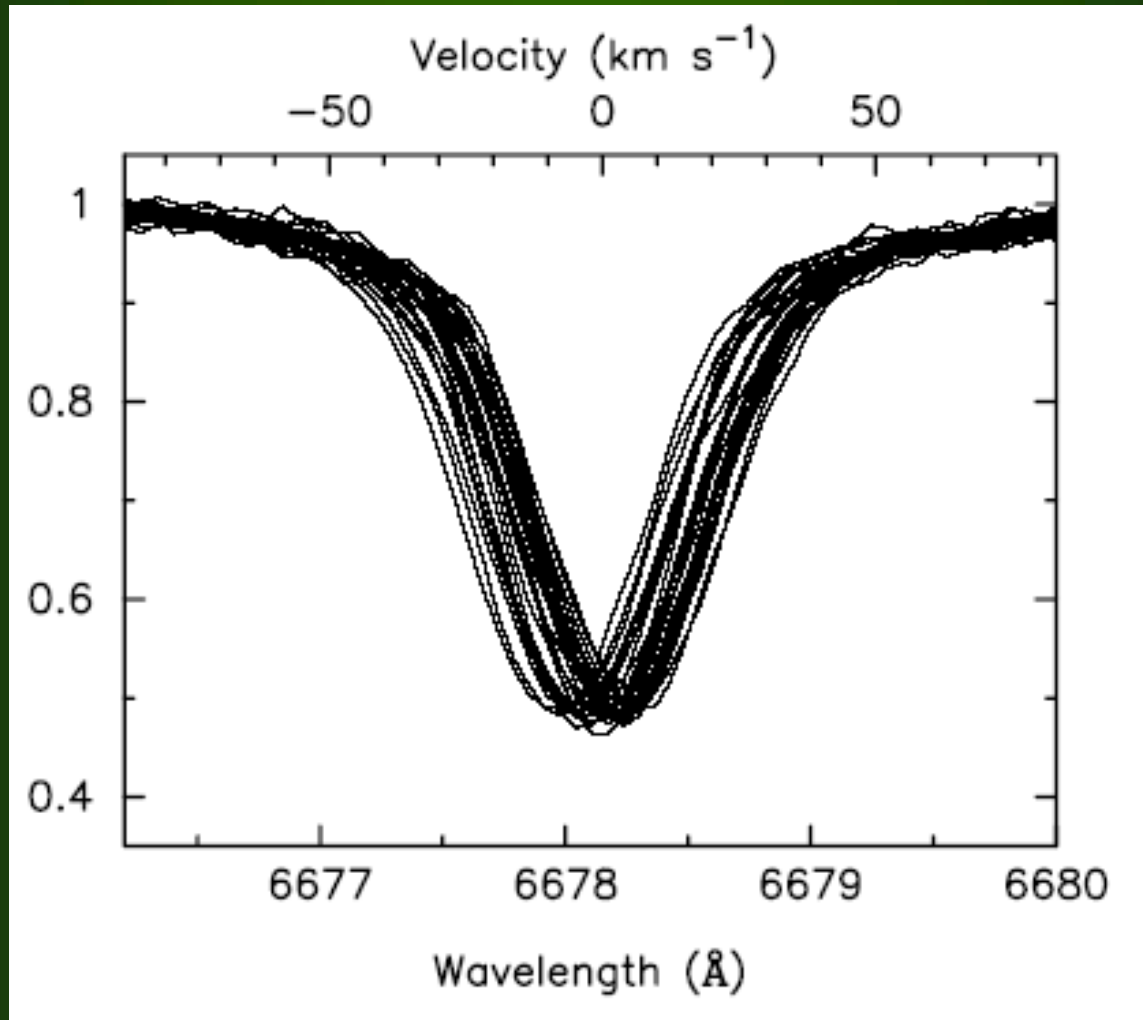
Zmiany linii SiIII 4567 dla ϵ Cen (β Cep)



Zmiany profili linii dla ρ Pup (δ Sct), ESO



Zmiany linii HeI 6678 dla 16 Lac (β Cep)



Zmiany linii SiIII 4574 dla β Cep

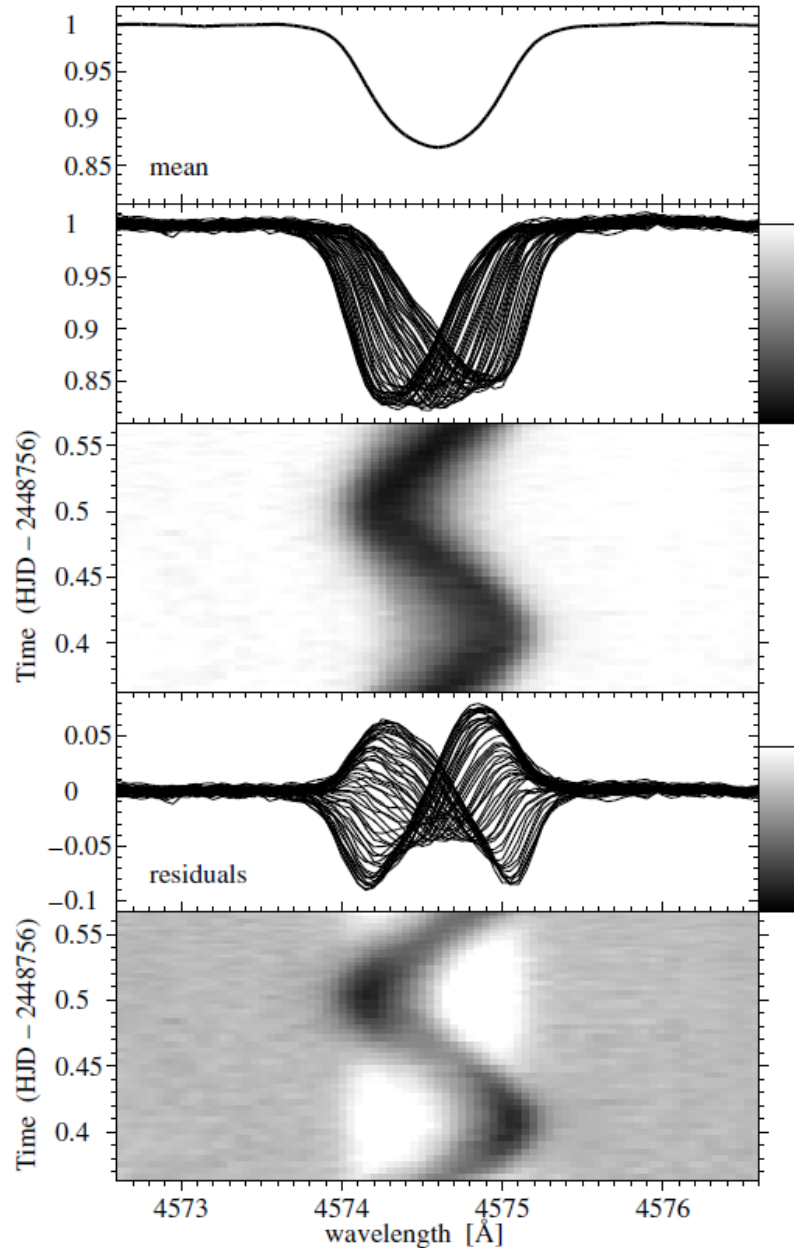


Fig. 2. An example of one night of data, in the wavelength range around the Si III λ 4574 line. From top to bottom: the mean of all 620 spectra — 54 normalized spectra taken on JD 2448756 — a grey-scale representation of the intensity variations in the line — the 54 residual spectra (mean spectrum subtracted from the normalized ones) — a grey-scale image of the residual intensity variations in the line

METODY FOURIEROWSKIE

- **odtworzamy sygnał szeregiem funkcji trygonometrycznych**
- **analizujemy dane małymi przedziałami i dopasowujemy „krótkie” funkcje okresowe - analiza „wavelet”**

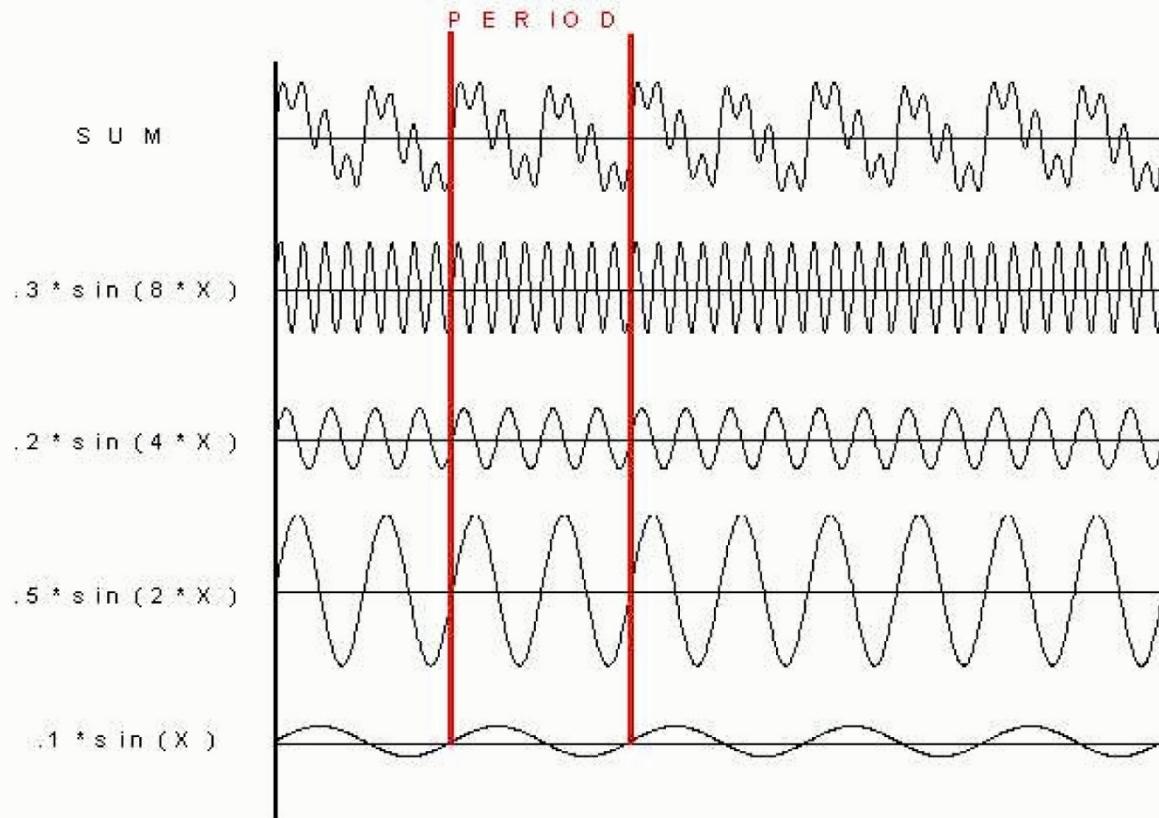
METODY STATYSTYCZNE

- **PDM (Phase Dispersion Minimisation) – szukamy okresu, dla którego rozrzut punktów wokół średniej krzywej na diagramie fazowym jest najmniejszy**
- **autokorelacja – porównujemy między sobą punkty obserwacyjne oddalone o pewien przedział czasowy**
- **test ANOVA – szukamy okresowości, które minimalizują wariancję danych obserwacyjnych**

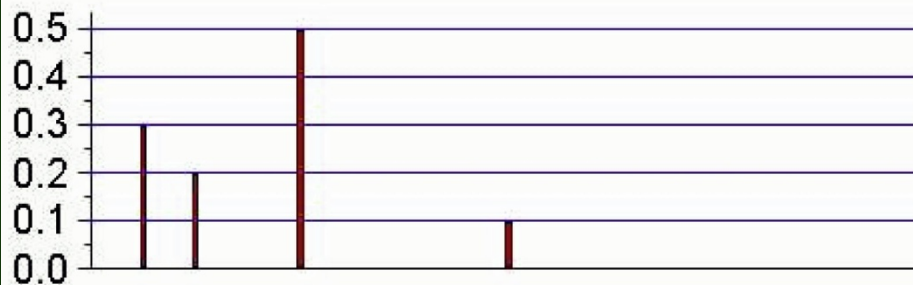
TRANSFORMATA FOURIERA

f (czas) \Rightarrow F (częstotliwość)

$$F(\nu) = \int f(t) \exp(i2\pi\nu t) dt$$



transformata Fouriera



ZAKRES CZĘSTOTLIWOŚCI I PRÓBKOWANIE

Dane obserwacyjne dają ograniczenie na:

- 1. rozdzielczość w częstotliwości**
- 2. zakres przeszukiwanych częstotliwości**

maksymalna częstotliwość = częstotliwość Nyquista

$$v_{Nq} = 1/(2D)$$

D – odstęp czasowy między kolejnymi obserwacjami

Minimalna częstotliwość (częstotliwość Rayleigha) jest dana przez bazę czasową obserwacji

TWIERDZENIE O PRÓBKOWANIU **Whittakera-Nyquista-Kotielnikova-Shannona**

Sygnal $x(t)$ można jednoznacznie odtworzyć jeśli tempo próbkowanie wynosi co najmniej dwa razy maksymalna częstotliwość jaka występuje w sygnale.

$$(-v_{Nq}, v_{Nq})$$

$\Delta v = v_{Nq} / N = 1 / (2ND)$ – krok w częstotliwości do liczenia t. F.

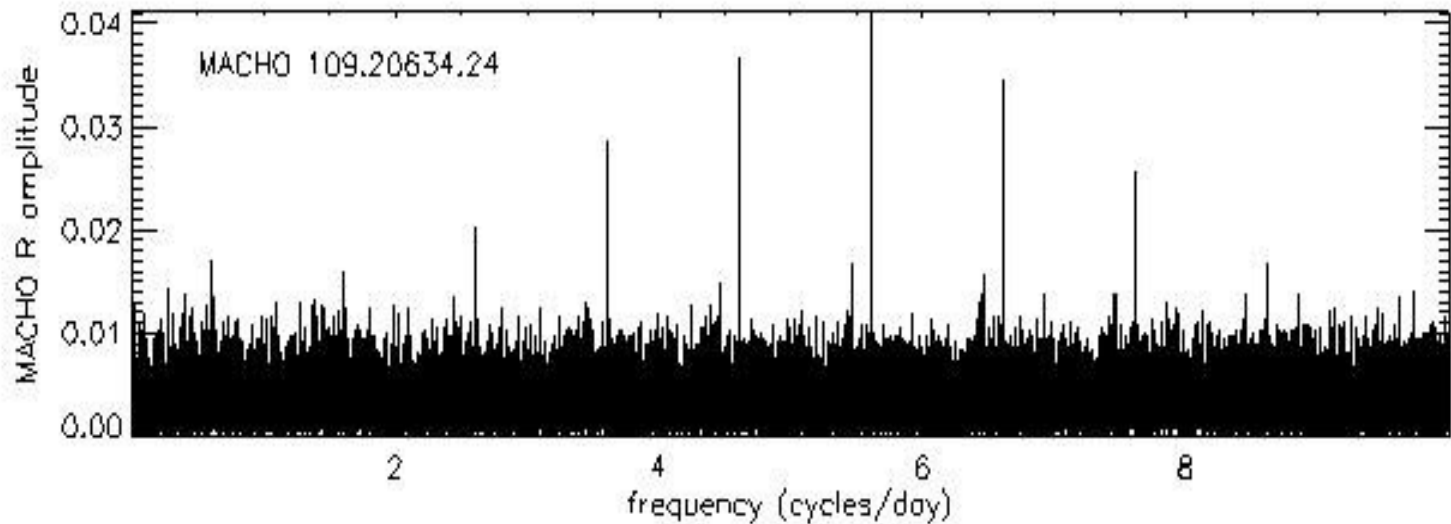
Inaczej:

Sygnal ciągły $x(t)$ możemy odtworzyć z wektora jego wartości w dyskretnych chwilach czasu $n\Delta t$, jeśli nie było w nim częstości wyższych niż $1/(2D)$.

Poza częstotliwością **Nyquista** pojawiają się aliasy:

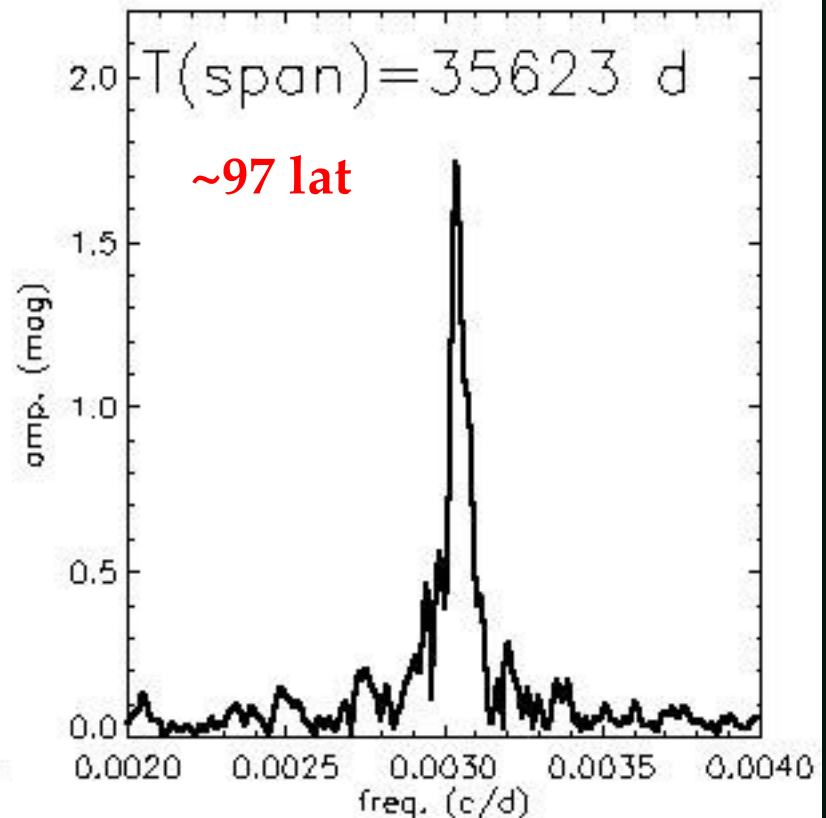
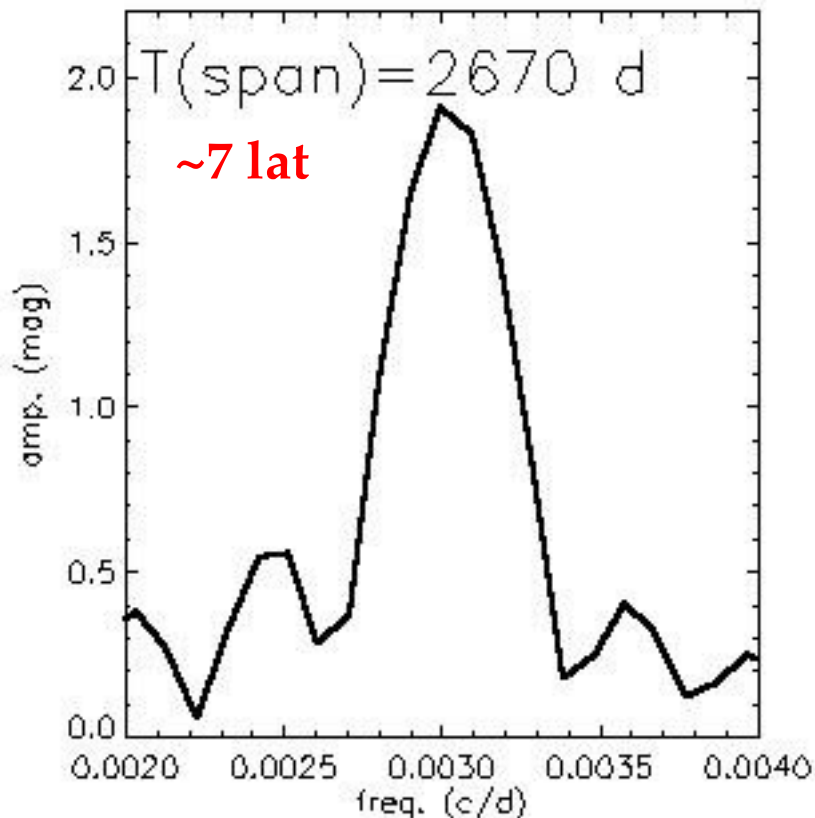
$$\nu_s + k \cdot \nu_g$$

Przykład gwiazdy typu δ Sct z projektu MACHO



Baza czasowa daje informację o dokładności wyznaczanych okresowości.

Przykład R CVn: $P = 328.53$ d (Mira)



ALGORYTMY LICZENIA TF

DFT – dyskretna transformata Fouriera (XVIII w.)

Jest to klasyczny algorytm, który możemy zdefiniować dla dowolnej próbki danych: $\{X(t_i), i=1, \dots, N\}$ i Δt_i -dowolny.

$$FT_X(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \exp(-i\omega t_j).$$

Klasyczny periodogram liczymy według formuły

$$\begin{aligned} P_X(\omega) &= \frac{1}{N_0} |\text{FT}_X(\omega)|^2 \\ &= \frac{1}{N_0} \left| \sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \exp(-i\omega t_j) \right|^2 \\ &= \frac{1}{N_0} \left[\left(\sum_j X_j \cos \omega t_j \right)^2 + \left(\sum_j X_j \sin \omega t_j \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$P_X(\omega) \propto A^2$$

Jeśli dane X zawierają składową sinusoidalną o częstotliwości ω_0 , wówczas dla $\omega = \omega_0$, $X(t)$ i $\exp(-i\omega t)$ są w fazie co daje duży wkład do sumy na poprzednim slajdzie i mamy $\max(P_X)$. Dla innych wartości ω człony w sumie są dodatnie lub ujemne, co daje wygaszanie i mały wkład.

**Jeśli X jest „czystym” szumem gausowski
to P_X ma rozkład eksponencjalny.**

FFT – szybka i efektywna metoda liczenia TF

Warunek: dane muszą być równoodstępne i ilość punktów musi się wyrażać przez 2^N .

algorytm Cooleya-Tukeya
Ilość operacji $M \log_2 N$ zamiast N^2

Przeważnie dane nie są równoodstępne.

DCDFT (Data-Compensated DFT) – Ferraz-Mello (1981)

Periodogram Lomb-Scargla (1992)

CLEAN - Roberts et al. (1987)

CLEANest - Foster (1995)

Periodogram Lomb-Scargla – Lomb (1975), Scargle (1982).

Równoważny do metody LS (Least Squares fitting),
bo daje ocenę istotności danej częstotliwości.

Lomb N.R., 1976, Ap&SS 39, 447

Scargle J.D., 1982, ApJ 263, 835

Periodogram Lomb-Scargla

$$p(\nu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^N x(t_i) \cos[2\pi\nu(t_i - \tau)] \right)^2}{\sum_{i=1}^N \cos^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]} + \frac{\left(\sum_{i=1}^N x(t_i) \sin[2\pi\nu(t_i - \tau)] \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sin^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]} \right\}$$

τ jest epoką początkową dobraną tak, aby

$$\sum_{i=1}^N \cos[2\pi\nu(t_i - \tau)] \sin[2\pi\nu(t_i - \tau)] = 0$$

**$p(\nu)$ – redukcja sumy kwadratów
odchyłek przy danej częstotliwości ν**

**wprowadzenie τ daje niezmienniczość
względem przesunięcia w czasie**

Znormalizowany periodogram L-S
Horne & Baliunas, 1986, ApJ 302, 757
Press & Rybicki, 1992, Numerical Recipes

$$p(\nu) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left\{ \frac{(\sum(x(t_i) - \bar{x}) \cos[2\pi\nu(t_i - \tau)])^2}{\sum \cos^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]} + \frac{(\sum(x(t_i) - \bar{x}) \sin[2\pi\nu(t_i - \tau)])^2}{\sum \sin^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]} \right\}$$

**Tak zdefiniowany $p(\nu)$ ma eksponencjalny
rozkład prawdopodobieństwa**

Prawdopodobieństwo że $p(v)$ będzie pomiędzy z a $z+dz$ jest $\exp(-z)dz$

False alarm probability (FAP)

$$p(>z) = 1 - (1 - e^{-z})^M$$

M ilość niezależnych częstotliwości
FAP jest prawdopodobieństwem , że częstotliwość o $p > z$ jest związana z szumem

Jeśli $\exp(-z)$ małe to

$$p(>z) \approx Me^{-z}$$

Przykład z Numerical Recipes str. 571

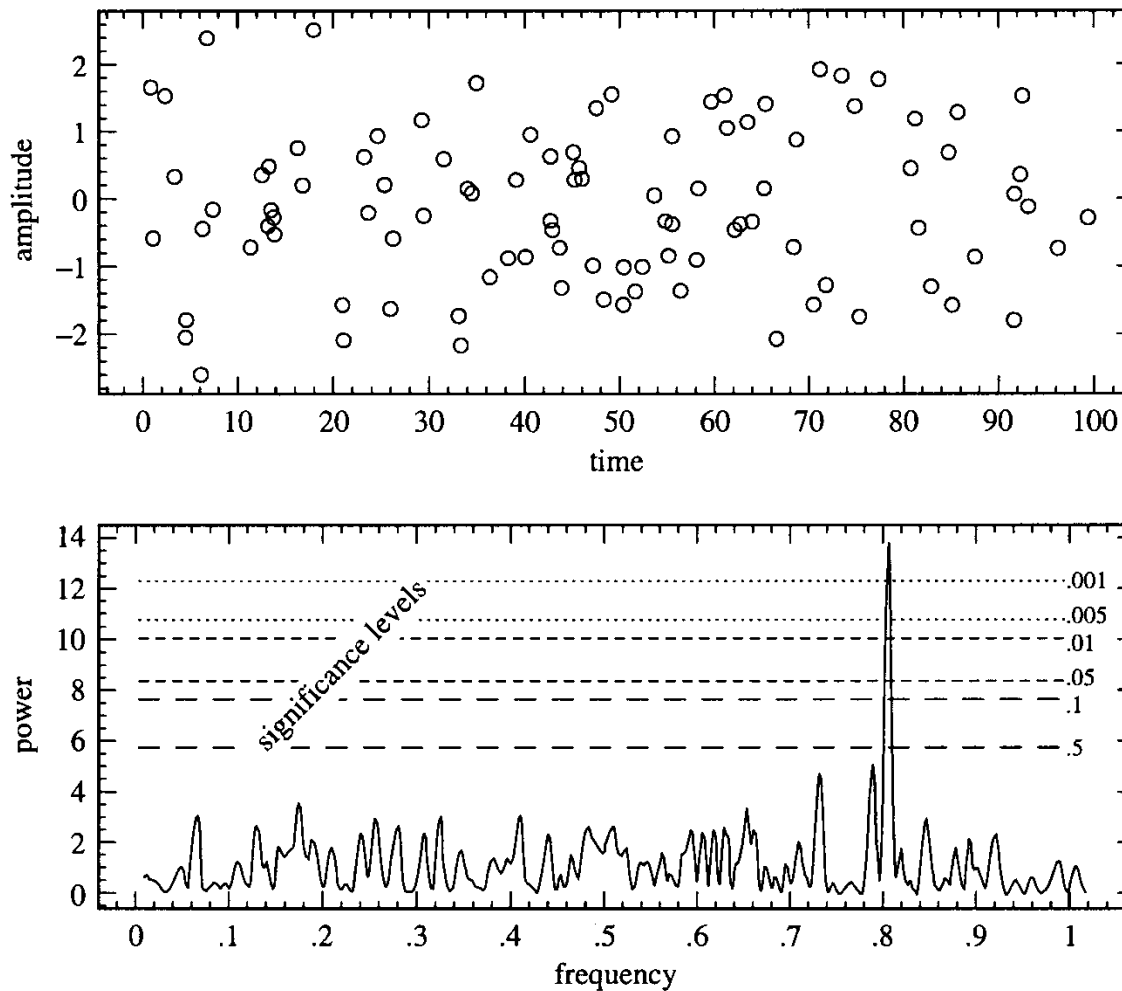


Figure 13.8.1. Example of the Lomb algorithm in action. The 100 data points (upper figure) are at random times between 0 and 100. Their sinusoidal component is readily uncovered (lower figure) by the algorithm, at a significance level better than 0.001. If the 100 data points had been evenly spaced at unit interval, the Nyquist critical frequency would have been 0.5. Note that, for these unevenly spaced points, there is no visible aliasing into the Nyquist range.

Periodogram L-S z normalizacją $p(\nu) \in [0,1]$

$$p(\nu) = \frac{\frac{\left(\sum (x(t_i) - \bar{x}) \cos[2\pi\nu(t_i - \tau)]\right)^2}{\sum \cos^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]} + \frac{\left(\sum (x(t_i) - \bar{x}) \sin[2\pi\nu(t_i - \tau)]\right)^2}{\sum \sin^2[2\pi\nu(t_i - \tau)]}}{\sum (x(t_i) - \bar{x})^2}$$

Istotność danego piksu: $S/N > 4$ (Breger et al. 1993)

Poziom ufności $> 99.9\%$ (Kuschnig et al. 1998 na podstawie obserwacji HST FGS zakładając biały szum fotonowy)

Dla danych Keplera przeważnie przyjmuje się $S/N > 5$

Analiza Fouriera jest szczególnie użyteczna do badania zjawisk **wielookresowych** (np. pulsacje wielomodalne).

Zmiany okresów i amplitud przejawiają się w widmie mocy jako dodatkowe piki w sąsiedztwie piku głównego.

TRANSFORMATA FALKOWA (WAVELET TRANSFORM)

Morlet 1982

$$W(\omega, \tau; x(t)) = \omega^{1/2} \int x(t) f^*(\omega(t - \tau)) dt$$

Falka Morleta (fala płaska modulowana f. Gaussa)

$$f(z) = e^{-cz^2} (e^{iz} - e^{-1/4c}) = e^{-c\omega^2(t-\tau)^2} (e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-1/4c}), \quad (1-2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 0.$$

DYSKRETNA TRANSFORMATA FALKOWA (DWT)

Foster 1996

$$W(\omega, \tau; x(t)) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_{\alpha}) f^{*}(\omega(t_{\alpha} - \tau)).$$

$$\operatorname{Re}(W) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_{\alpha}) e^{-c\omega^2(t_{\alpha} - \tau)^2} \cos(\omega(t_{\alpha} - \tau))$$

$$\operatorname{Im}(W) = -\sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_{\alpha}) e^{-c\omega^2(t_{\alpha} - \tau)^2} \sin(\omega(t_{\alpha} - \tau))$$

$$|W(\nu, \tau)|$$

Ciągła transformata falkowa (Continuous Wavelet Transform, CWT)

$$\tilde{s}_{\Psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi \left(\frac{t - b}{a} \right) dt$$

Wartość $\hat{s}_{\Psi}(a, b)$ pozwala określić, jak dobrze dana falka przybliży sygnał

a - parametr skali ($a > 1$ - falka rozciągnięta, $a < 1$ - falka ściśnięta)

b - parametr przesunięcia (translacji), zmienia położenie falki

$s(t)$ - sygnał badany zależny od czasu t

$\Psi(t)$ - funkcja falkowa

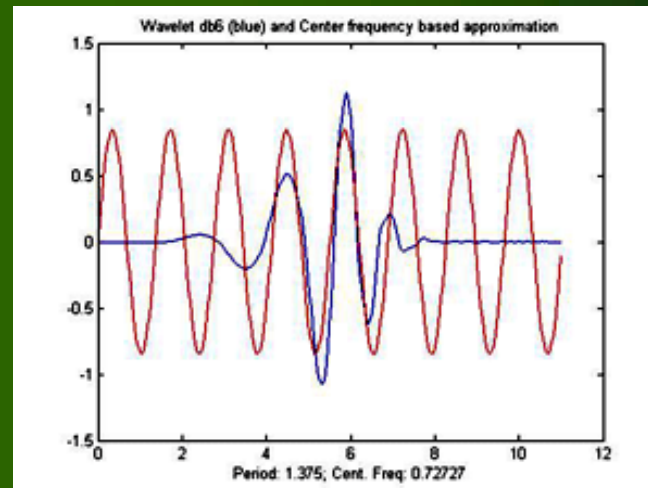
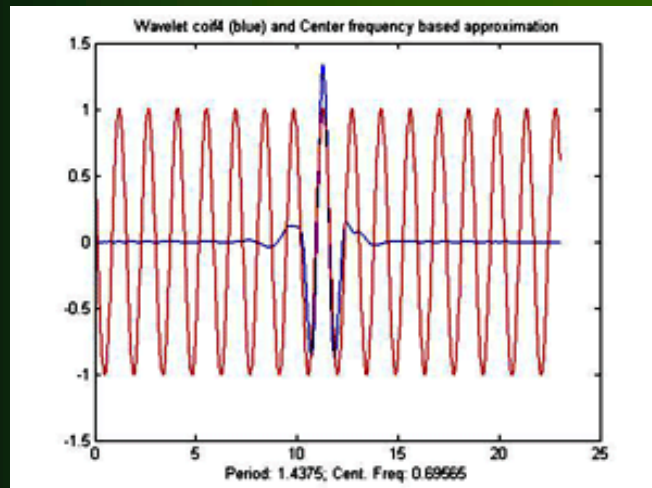
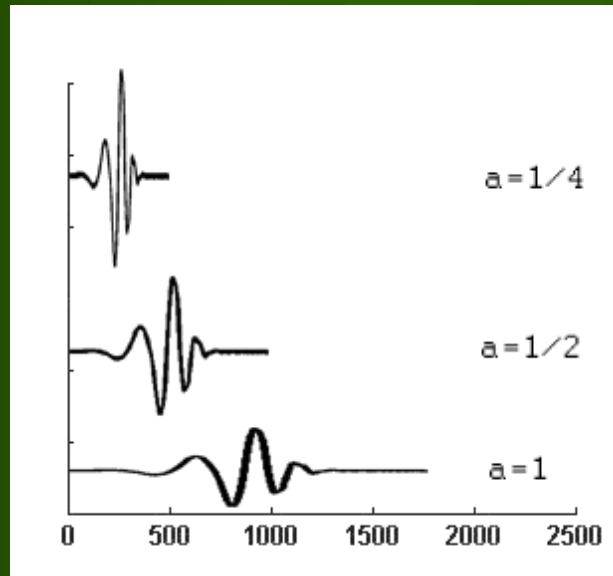
Jako wynik transformacji falkowej nigdy nie dostaniemy dokładnej wartości częstotliwości.

Jądro przekształcenia nie reprezentuje jednej częstotliwości a przeważnie jej przedział.



FUNKCJE FALKOWE

Współczynnik skali $a \approx 1/\omega$

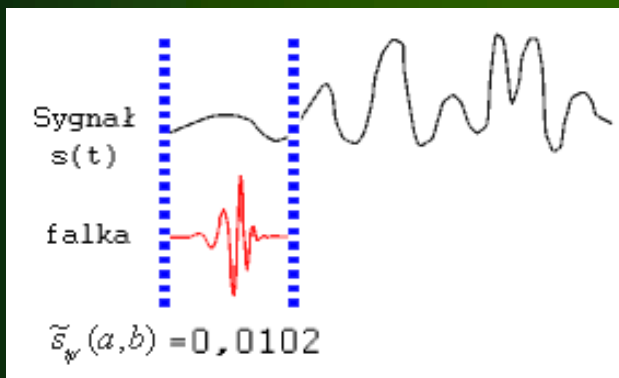


FUNKCJE FALKOWE

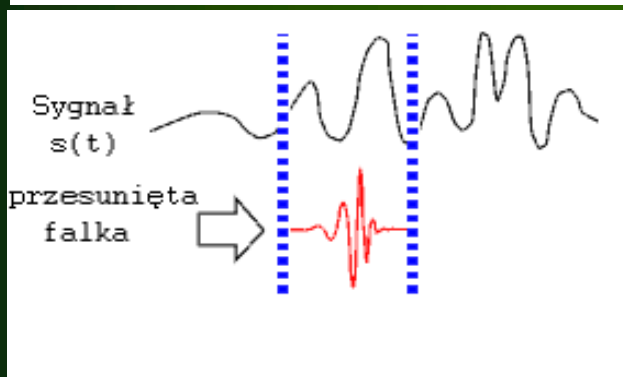
Współczynnik przesunięcia, b



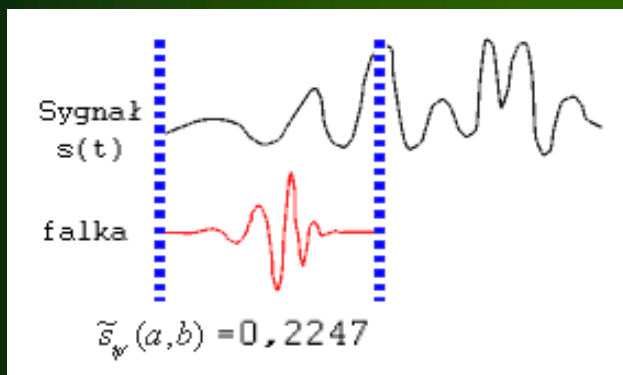
ANALIZA FALKOWA - sygnał opisujemy falkami otrzymanymi poprzez translację i dylatację falki podstawowej ('mother wavelet').



porównywana sygnału $s(t)$ z falką o pewnej skali a i współczynniku przesunięcia b

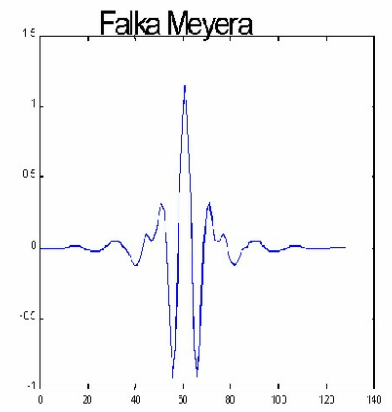
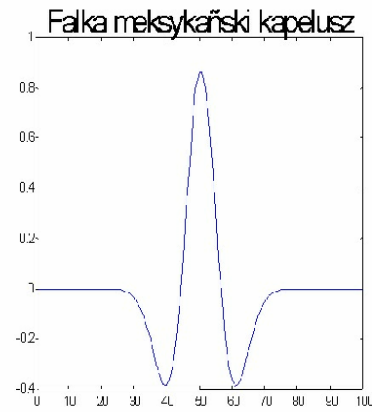
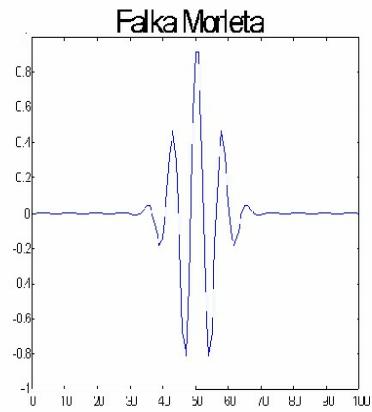
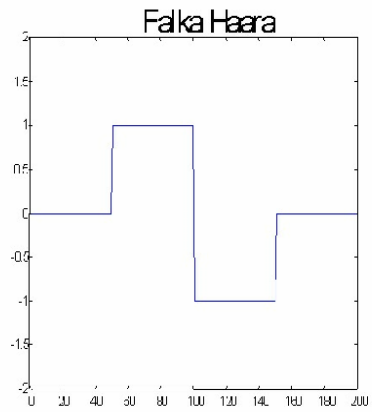


Przesunięcie funkcji falkowej (zmiana b). Funkcja falkowa zostaje porównywana z innym fragmentem sygnału $s(t)$



Gdy funkcja falkowa zostanie przesunięta na koniec $s(t)$, zmieniamy skalę a i porównujemy od nowa.

PRZYKŁADY FALEK



ANALIZA FALKOWA

Analiza widma mocy w funkcji czasu.

Uwzględnia zjawiska o zmiennym okresie, zjawiska przejściowe, nielinowości.

Zastosowanie do badania ewolucji zmienności, np. zmienne pulsujące nieregularnie.

Zastosowanie:

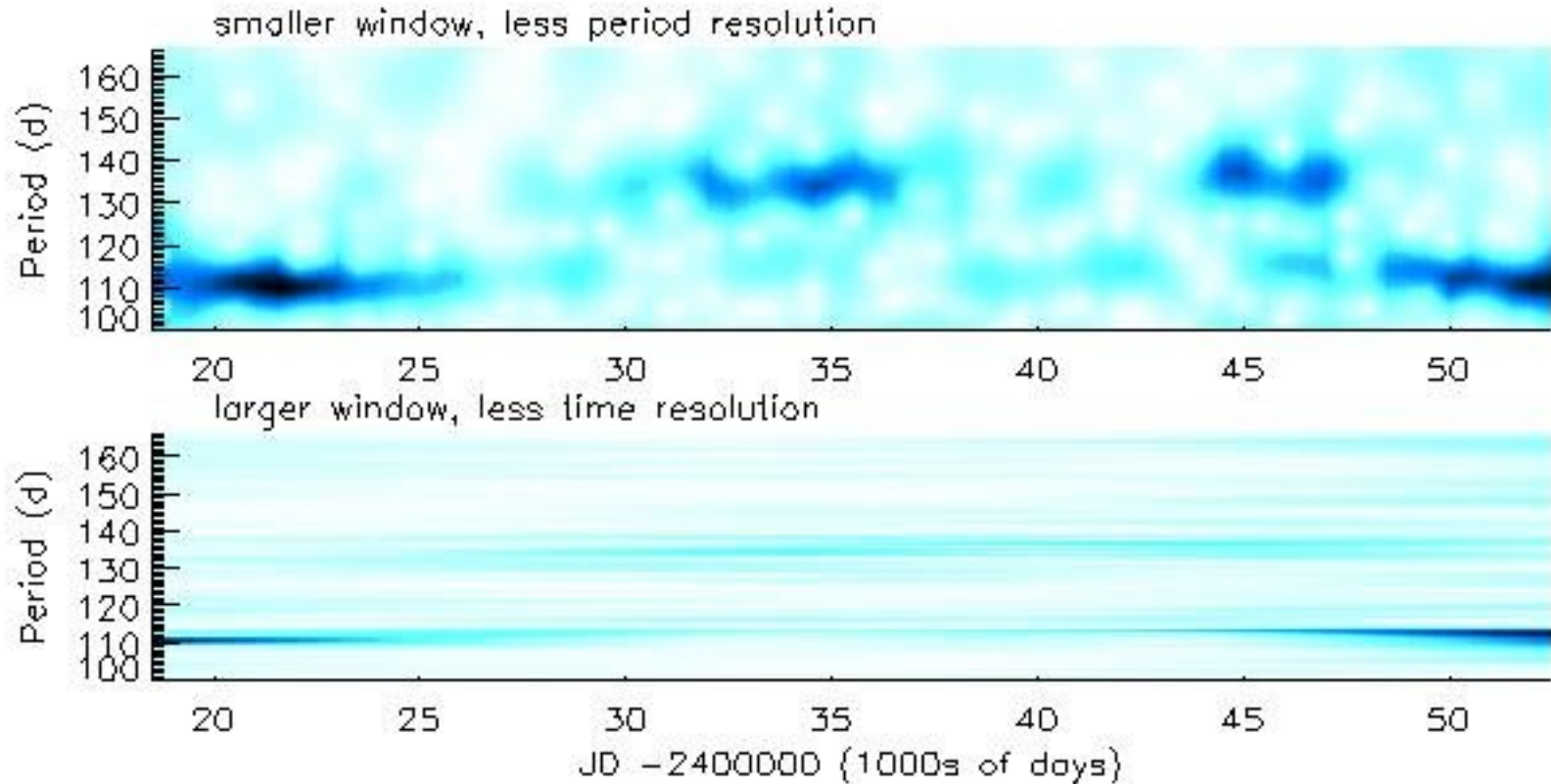
- wiele gwiazd długookresowych ma zmienne okresy, np. Miry, SR, L, RV Tau
- przełączanie modów (np. gwiazda SR: Z Aurigae)
- gwiazdy CV (cataclismic variables) mogą wykazywać okresowości przejściowe
- zmienne źródła rentgenowskie
- etc.

W analizie **falkowej** istotne jest dobranie odpowiedniego przedziału („okna”).

Mniejsze „okno” daje gorszą dokładność w częstotliwości.

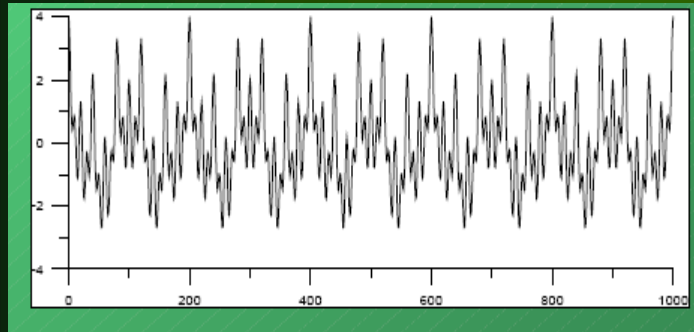
Większe „okno” daje gorszą rozdzielczość czasową.

Z Aurigae

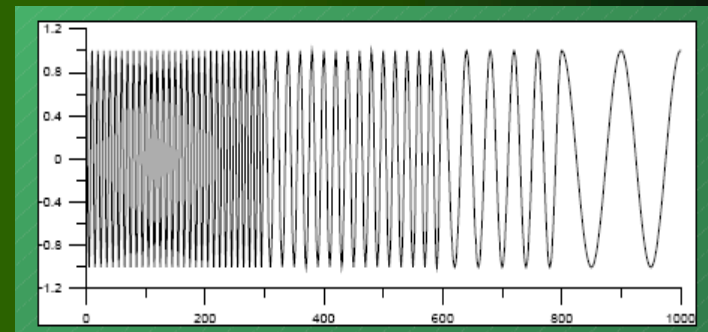


Różnica między analizą Fouriera a falkową

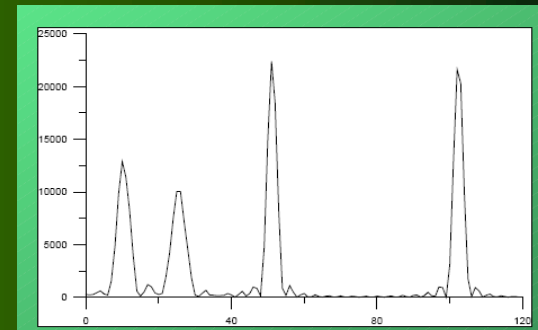
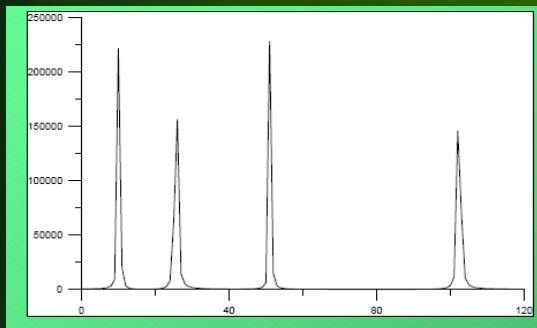
SYGNAŁ 1



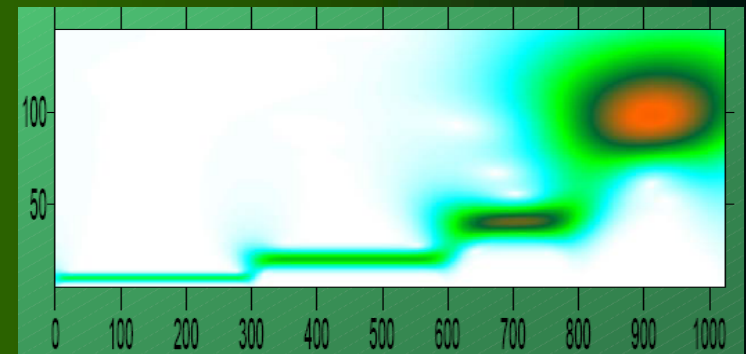
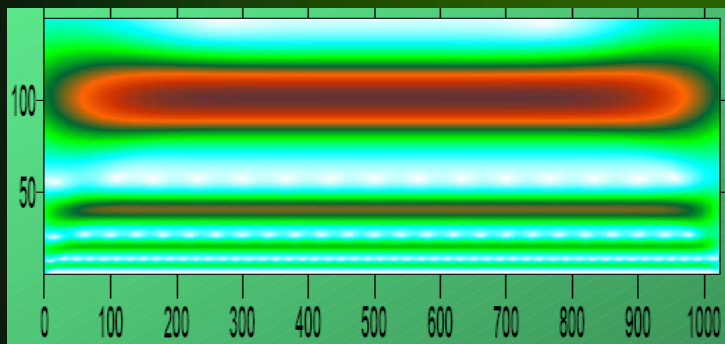
SYGNAŁ 2



FT



WT



Wybór między FT a WT

FT - przebiegi czasowe niegasnące lub trwające długo w porównaniu z oknem widmowym, gdy nieistotna jest lokalizacja czasowa przebiegów przejściowych a istotna jest dokładna wartość częstotliwości

WT - przebiegi czasowe zasadniczo niestacjonarne, częste zjawiska przejściowe, których lokalizacja czasowa jest istotna a dokładna wartość częstotliwości nie

PHASE DISPERSION MINIMISATION

Szukamy okresowości w danych, dla której rozrzut wokół średniej krzywej na diagramie fazowym osiąga minimum.

Jurkevich(1971), Stellingwerf (1978)

METODYKA

**Diagram fazowy dzielimy na N_b przedziałów,
każdy o długości $1/N_b$**

**Podział ten stosujemy N_c razy, przesuając
za każdym razem o $1/N_b N_c$**

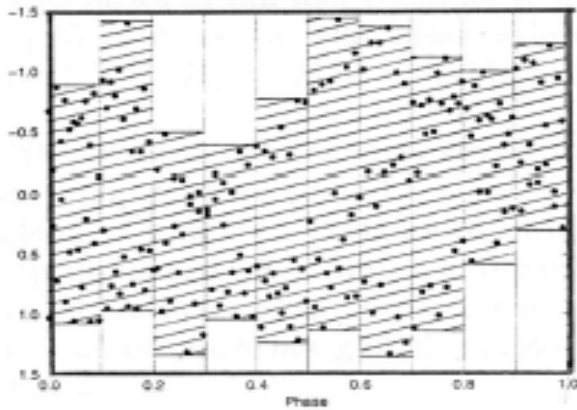
Statystyka Θ

$$\Theta \equiv \frac{\sum_{j=1}^M (N_j - 1) s_j^2 / \sum_{j=1}^M N_j - M}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / N - 1},$$

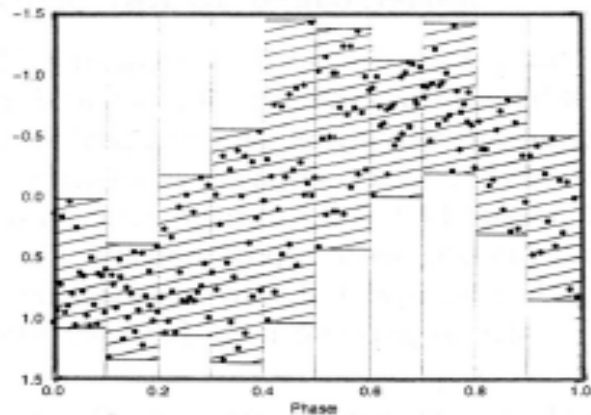
gdzie

$$s_j^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N_j - 1}.$$

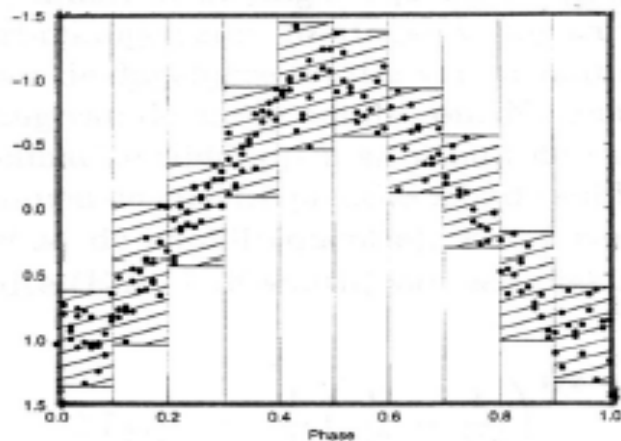
$M = N_b N_c$ całkowita liczba „binów”



**Diagram fazowy dla okresu
nieistniejącego w danych**

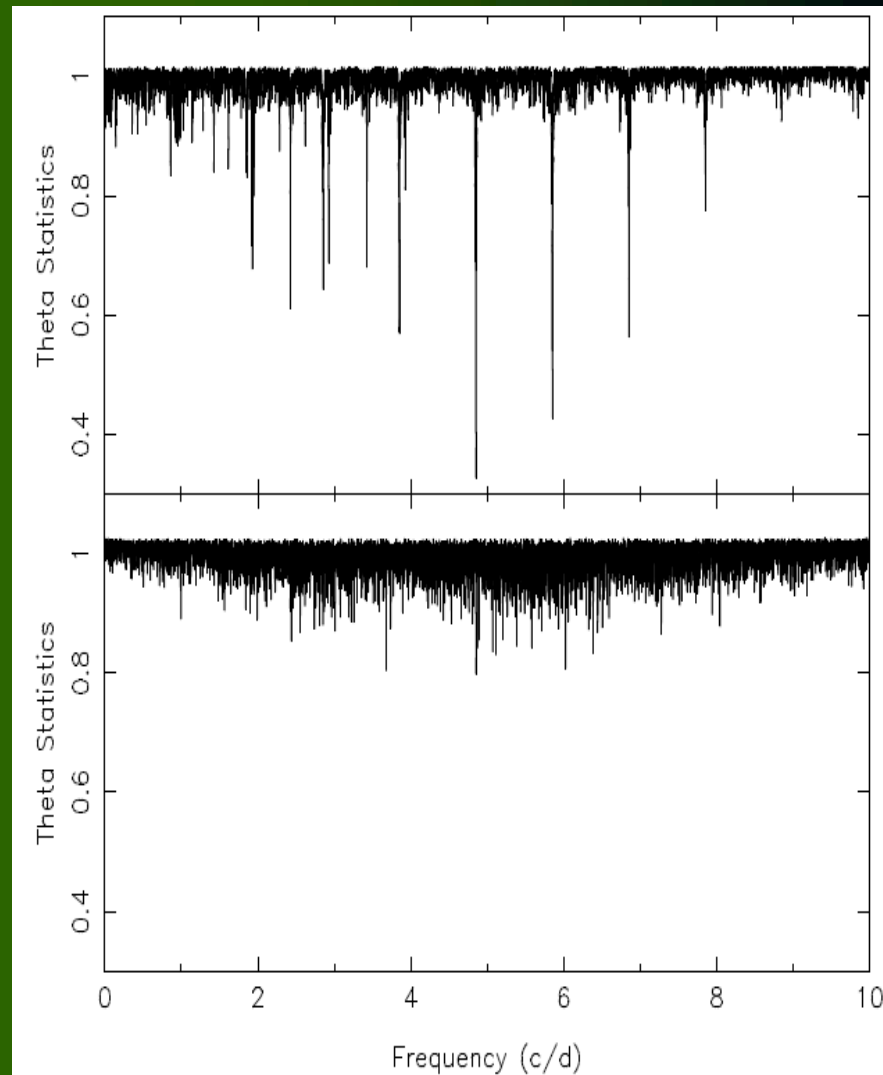
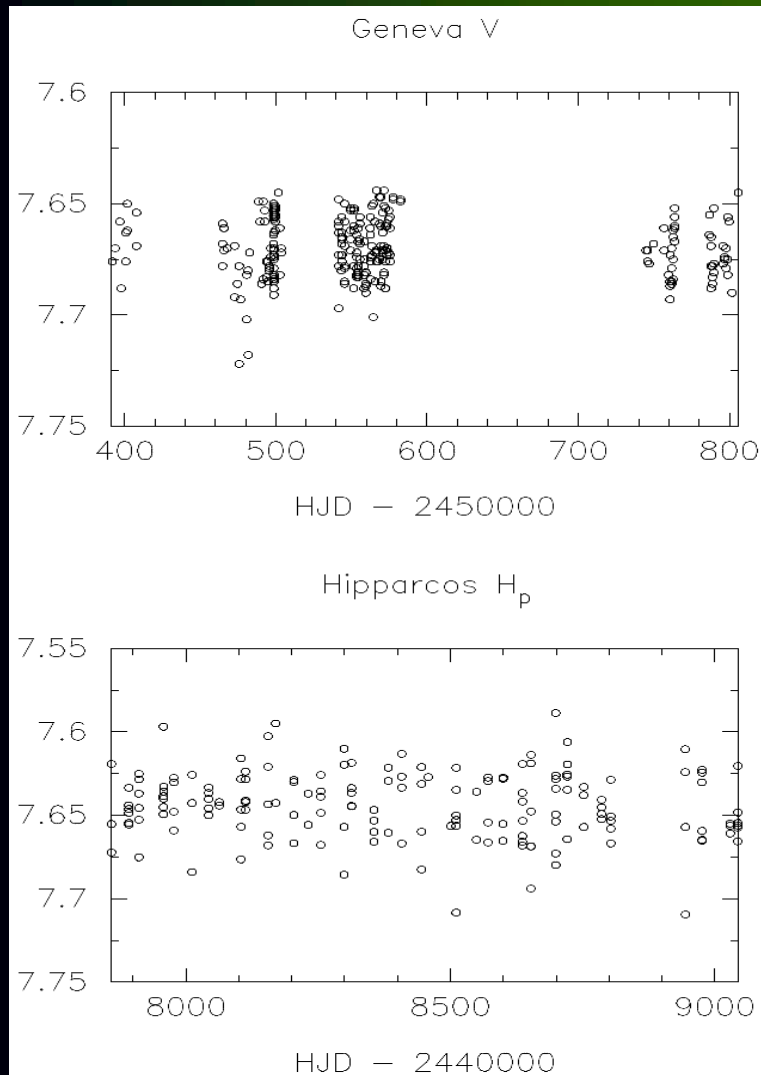


**Diagram fazowy dla okresu
bliskiego prawdziwemu**



**Diagram fazowy dla okresu
dobranego prawidłowo**

Statystyka Θ dla obserwacji V (Geneva) (panel górny) i obserwacji z Hipparcosa (panel dolny) dla gwiazdy β Cep, HD71913



AUTOKORELACJA

Badamy jak wygląda krzywa blasku w punktach odległych o pewien **interwał czasowy, τ** .

Wartość **funkcji autokorelacji** dla każdego τ zależy od uśrednionej różnicy między punktami.

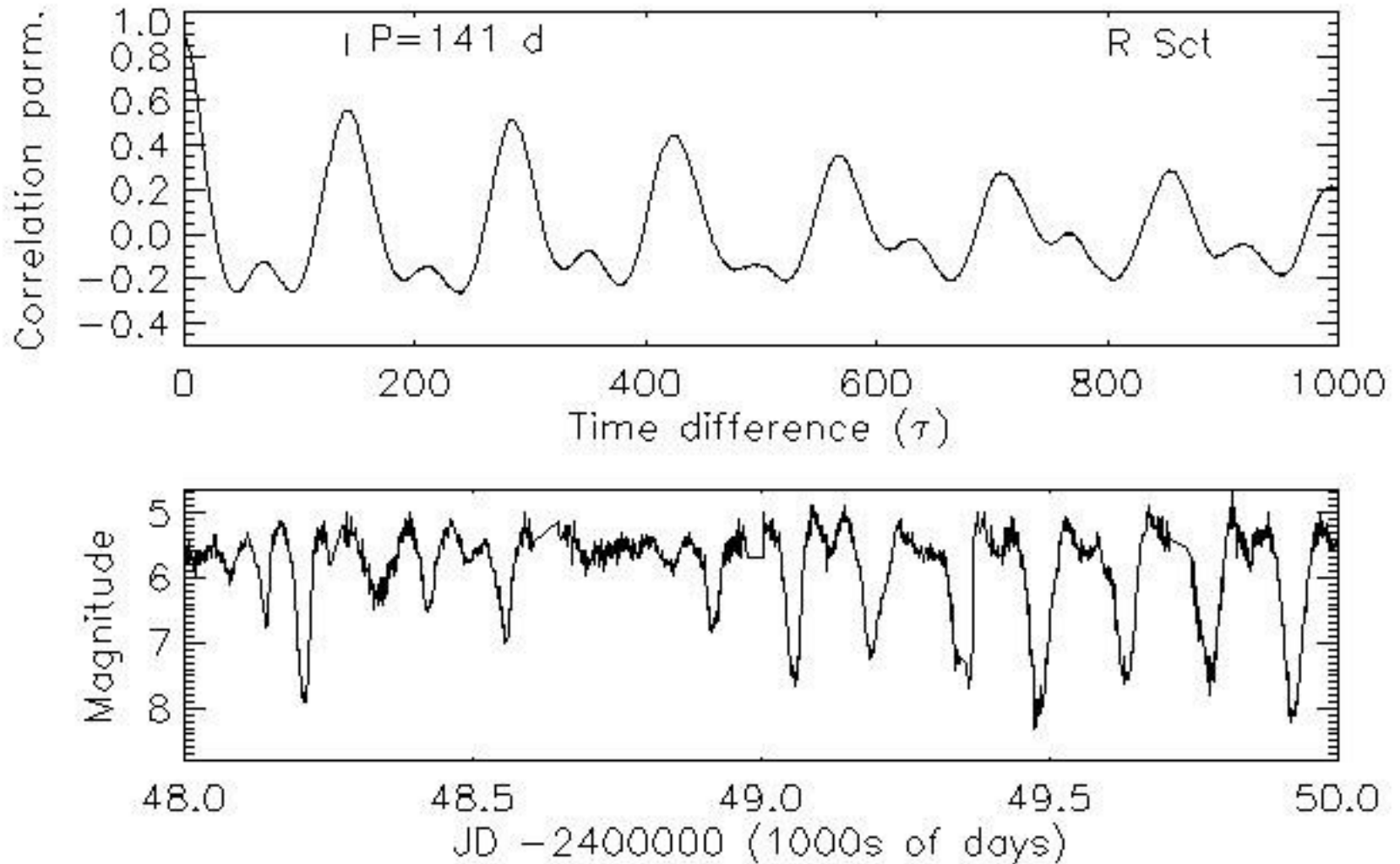
Jeśli obserwacje mają zmienność z okresem τ , to **funkcja autokorelacji** ma pik przy τ .

Zastosowanie funkcji autokorelacji:

- Gwiazdy o nieregularnych zmianach jasności
- Gwiazdy ściśle okresowe
- Okresowości przejściowe

Nie stosuje się do gwiazd wielookresowych !

R Sct (zmienna typu RV Tau)



Metoda analizy wariancji - ANOVA (analysis of variance)

- A. Schwarzenberg-Czerny (1998), MNRAS 301, 831
<http://www.camk.edu.pl/~alex/>

Programy do analizy danych:

AAVSO: <https://www.aavso.org/vstar-overview>

- Date Compensated Discrete Fourier Transform (DC DFT)
- CLEANest period analysis refinement algorithm
- Weighted Wavelet Z-Transform (WWZ)

PERIOD04: <https://www.univie.ac.at/tops/Period04/>

StatCodes: <http://astrostatistics.psu.edu/statcodes/>

- Time series analysis