

# PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2019/2020

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

# RÓWNANIA PULSACYJNE

- ✦ Analiza zaburzeń liniowych
- ✦ Zależności czasowe i kątowne
- ✦ liniowe równania nieadiabatyczne
- ✦ Przybliżenie adiabatyczne
- ✦ liniowe równania adiabatyczne

**Pulsacje o małych amplitudach**  
małe zaburzenia wokół stanu równowagowego

$$p(r,t) = p_0(r) + p'(r,t)$$

$$p(r,t) = p_0(r_0) + \delta p(r,t)$$

$$\xi = \delta r = r - r_0$$

**LINEARYZACJA**

## Reguły komutacji

' komutuje z  $\partial$  i  $\nabla$

$\delta$  komutuje z  $d$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)' = \frac{\partial \rho'}{\partial t},$$

$$(\nabla \rho)' = \nabla \rho',$$

$$\delta\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{d\delta\rho}{dt},$$

## równanie ciągłości

w zmiennych Eulera

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0$$

scalkowane po czasie

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho_0 \boldsymbol{\delta r}) = 0$$

w zmiennych Lagrange'a

$$\delta \rho + \rho_0 \operatorname{div}(\boldsymbol{\delta r}) = 0$$

## równanie ruchu

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \mathbf{r}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho_0 \mathbf{g}' + \rho' \mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{g}' = -\nabla \Phi'$$

zaburzenie potencjału spełnia zaburzone równanie Poissona

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'$$

którego rozwiązaniem jest

$$\Phi' = -G \int_V \frac{\rho'(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

## równanie energii

korzystając z następującej własności

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial}{\partial t}(\delta p)$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta Q}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left( \frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right) \\ &= c_{P,0} \left( \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{\Gamma_{2,0} - 1}{\Gamma_{2,0}} \frac{T_0}{p_0} \frac{\partial \delta p}{\partial t} \right) . \end{aligned}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta Q}{\partial t} = \delta(\rho \varepsilon - \nabla \cdot \mathcal{F}) = (\rho \varepsilon - \nabla \cdot \mathcal{F})'$$

$$\varepsilon = f(\rho, T, \{X_i\}) \Rightarrow \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln \rho} \right)_{T, X_i} \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \left( \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln T} \right)_{\rho, X_i} \frac{\delta T}{T_0}$$

**Zaburzenie strumienia promienistego:**

$$\mathcal{F}' = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0$$



## ZALEŻNOŚCI CZASOWE I KĄTOWE

Zakładamy symetrię sferyczną i czasową niezależność dla modelu równowagowego. Wówczas rozwiązanie możemy rozdzielić w czasie oraz we współrzędnych kątowych

$$p'(r, \theta, \varphi, t) = p'(r) f(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$$

$f(\theta, \varphi)$  – funkcja opisująca zależności kątowe, którą wyznaczymy

$p'(r)$  - amplituda zmian danej wielkości fizycznej

zależność czasową zakładamy w postaci  $\exp(-i\omega t)$

Wówczas równanie **ruchu** ma postać

$$\rho\omega^2\xi = \nabla p' + \rho\nabla\Phi' + \rho'\nabla\Phi$$

i ma charakter liniowego zagadnienia na wartości własne do wartości własnej  $\omega^2$ .

Prawa strona - liniowy operator,  $L(\xi)$ .

Aby otrzymać  $f(\theta, \varphi)$  wyrażamy  $\xi$  jako

$$\xi = \delta \mathbf{r} = \xi_r \mathbf{a}_r + \xi_h$$

$$\nabla_{\text{h}}^2 f = -\frac{1}{r^2} \Lambda f$$

$$\Lambda = l(l + 1)$$



$$f(\theta, \varphi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Czyli zmienne zapisujemy w postaci

$$\xi_r(r, \theta, \varphi, t) = \tilde{\xi}_r(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$$

$$p'(r, \theta, \varphi, t) = \tilde{p}'(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{\xi} = \left[ \tilde{\xi}_r(r), \tilde{\xi}_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \tilde{\xi}_h(r) \frac{\partial}{\sin \theta \partial \varphi} \right] Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}$$

$\tilde{\xi}_r, \tilde{\xi}_h$  - średnie przesunięcie radialne i horyzontalne

$$\tilde{\xi}_h(r) = \frac{1}{\omega^2 r} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) \quad \text{- horyzontalna składowa}$$

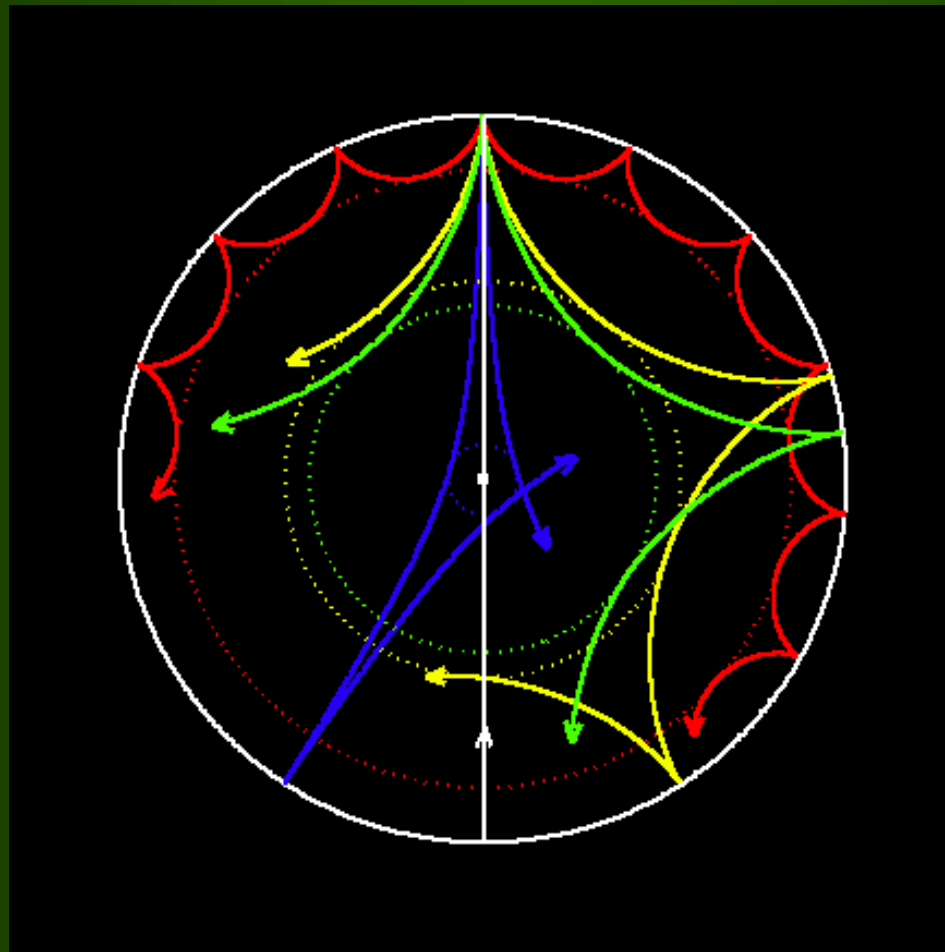
składowa tangencjalna liczby falowej w lokalnym przybliżeniu oscylacji jako fali płaskiej,  $k_h$

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \simeq k_h^2$$

horyzontalna długość fali na powierzchni

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{k_h} \simeq \frac{2\pi R}{\sqrt{l(l+1)}}$$

## propagacja fali dźwiękowej



kropkowane kółka- wewnętrzne punkty odbicia

**równania pulsacyjne przekształcamy do następującej postaci  
(wielkości równowagowe są bez indeksów!)**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \xi_r \right) + \frac{1}{\Gamma_1} \xi_r \frac{\partial \ln p}{\partial r} + \left( \frac{\rho}{p\Gamma_1} + \frac{\nabla_h^2}{\omega^2} \right) \frac{p'}{\rho} + \frac{\nabla_h^2}{\omega^2} \Phi' = \frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{p\Gamma_1} \delta Q$$

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{g\rho}{p\Gamma_1} \right) p' - (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{p\Gamma_1} \delta Q$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_h^2 \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{p\Gamma_1} + \xi_r \frac{N^2}{g} \right) = -4\pi G \frac{\rho^2}{p} \frac{(\Gamma_3 - 1)}{\Gamma_1} \delta Q$$

$$\mathcal{F}'_r = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \mathcal{F}'_h = -K \nabla_h T', \quad K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3$$

$$-i\omega\rho\delta Q = (\rho\varepsilon)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mathcal{F}' \right) + \nabla_h^2 (KT')$$

$$\delta Q = \frac{p}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{\delta p}{p} - \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \right)$$



**Mając separacje zmiennych równania pulsacyjne redukują się do zwyczajnych równań różniczkowych na funkcje amplitudy danych wielkości fizycznych.**

Zakładając perturbacje  $\xi_r, p', T', \delta Q, \Phi', F_r'$  w postaci

$$p'(r, \theta, \varphi, t) = p'(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$$

dostaniemy 

-otrzymamy równania na  $p'(r)$ , ...

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \xi_r \right) + \frac{1}{\Gamma_1} \xi_r \frac{\partial \ln p}{\partial r} + \left( 1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2} \right) \frac{p'}{\rho c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2} \Phi' = \frac{(\Gamma_3 - 1)}{c^2} \delta Q$$

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{g}{c^2} \right) p' - (\omega^2 - N^2) \xi + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \frac{(\Gamma_3 - 1)}{c^2} \delta Q$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c^2} + \xi_r \frac{N^2}{g} \right) = -4\pi G \rho \frac{(\Gamma_3 - 1)}{c^2} \delta Q$$

$$\mathcal{F}'_r = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$-i\omega \rho \delta Q = (\rho \varepsilon)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mathcal{F}' \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (KT')$$

$$\delta Q = \frac{p}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{\delta p}{p} - \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \right)$$

$$c^2 = \frac{\Gamma_1 p}{\rho}$$

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} = k_h^2 c^2 ,$$

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) .$$

Równania te są podstawowymi równaniami dla liniowych nieradialnych pulsacji nieadiabatycznych z sześcioma zmiennymi:  $\xi_r, p', T', \delta Q, \Phi', F_r'$ .

Równanie te wraz z warunkami brzegowymi pozwalają na znalezienie wszystkich wartości własnych i odpowiadających im funkcji własnych.

Rząd azymutalny,  $m$ , nie występuje w równaniach pulsacyjnych. Zaniedbanie rotacji, pola magnetycznego etc. prowadzi do  $(2\ell+1)$ -krotnej degeneracji częstotliwości,  $\omega^2$ , i radialnych funkcji własnych.

## WARUNKI BRZEGOWE W CENTRUM

dla  $r \approx 0$  współczynniki w równaniach pulsacyjnych zachowują się następująco:  $g \sim 0$ ,  $\rho \sim \text{const}$ ,  $c^2 \sim \text{const}$ ,  $S_\ell^2 \sim 1/r^2$ ,  $N^2 \sim 0$ ,  $N^2/g \sim 0$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \xi_r \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{\omega^2} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} - \omega^2 \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \ell(\ell + 1) \Phi' = 0$$

szukamy rozwiązań typu  $r^\ell$ ,  $r^{-(\ell+1)}$ ,  $r^{\ell-1}$

$$\frac{d\Phi'}{dr} - \frac{\ell\Phi'}{r} = 0$$

$$\xi_r = \ell \xi_h$$

$$\delta Q = 0$$

## WARUNKI BRZEGOWE NA POWIERZCHNI $r=R$

$$\delta p = 0$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{(\ell + 1)\Phi'}{r} = 0$$

$$\xi_r = \frac{p'}{g\rho}$$

$$\mathcal{F}_r = f_E J = f_E \frac{\sigma_{\text{rad}}}{\pi} T^4$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}_r}{\mathcal{F}_r} = \frac{\delta f_E}{f_E} + 4 \frac{\delta T}{T}$$



## PRZYBLIŻENIE ADIABATYCZNE

W wielu przypadkach wyraz grzania  $\partial\delta Q/\partial t$  możemy zaniedbać.  
Takie przybliżenie znacznie upraszcza zagadnienie.

Aby uzasadnić jego użycie rozważmy:

$$\frac{\partial\delta T}{\partial t} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{\partial\delta p}{\partial t} = \frac{1}{c_P} \frac{\partial\delta Q}{\partial t} = \frac{1}{c_P} \delta \left( \varepsilon - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathcal{F} \right)$$

Zakładając, że  $\delta T$  dominuje w równaniu dyfuzyjnym dostaniemy

$$\frac{1}{\rho c_P} \delta(\text{div } \mathcal{F}) \sim \frac{\delta T}{\tau_F}$$

gdzie

$$\tau_F = \frac{3\kappa\rho^2 c_P \ell^2}{4a\tilde{c}T^3} \simeq 10^{12} \frac{\kappa\rho^2 \ell^2}{T^3} \quad [\text{cgs}]$$

$\tau_F \approx \tau_{KH} \gg P$  - przybliżenie adiabatyczne jest dobre

Dla przybliżenia adiabatycznego mamy

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0$$

całkując po czasie dostaniemy

$$\delta p = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \delta \rho$$

w formalizmie Eulera mamy

$$p' + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla p = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} (\rho' + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \rho)$$

W przybliżeniu **adiabatycznym** ( $\delta Q=0$ )  
mamy tylko zmienne:  $\xi_r$  ,  $p'$  ,  $\Phi'$

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi' ,$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p' + \rho \frac{d\Phi'}{dr} ,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = -4\pi G \left( \frac{p'}{c^2} + \frac{\rho \xi_r}{g} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi' .$$

$$c^2 = \frac{\Gamma_1 p}{\rho}$$

## PRZYBLIŻENIE COWLINGA, $\Phi' = 0$

Znacznie upraszcza równania pulsacyjne.

Założenie: wkład do zmian  $\Phi$  z jednej części gwiazdy jest prawie całkowicie znoszony przez wkłady z innych części gwiazdy.

Ogólnie przybliżenie Cowlinga jest dobre dla  $\ell \geq 2$ , oraz wysokich owertonów (duże  $n$ ), oraz wszędzie tam gdzie  $U = 4\pi\rho r^3/M_r$  jest małe.

Jeśli  $\Phi'=0$  to na powierzchni

$$\xi_r = \xi_h \sigma^2$$

$\sigma^2$  - bezwymiarowa częstotliwość oscylacji

$$\sigma^2 = \omega^2 R^3 / GM$$

## FORMALIZM DZIEMBOWSKIEGO

Dziembowski (1977, AcA 21, 289) podał bardzo użyteczną postać równań pulsacyjnych wprowadzając bezwymiarowe zmienne.

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}$$

$$y_2 = \frac{1}{gr} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right)$$

$$y_3 = \frac{1}{gr} \Phi'$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}$$



Zmienne te mają **ten sam rząd** wielkości, dlatego nie tracimy znacząco na dokładności w obliczeniach numerycznych.

Sformułowanie to pozwala na bezpośrednie porównanie własności pulsacyjnych gwiazd o znacznie różnych parametrach gwiazdowych , np. białe karły a olbrzymy.

po wstawieniu zmiennych bezwymiarowych do wcześniej poznanych równań pulsacyjnych otrzymamy:

$$\frac{dy_1}{d \ln r} = (V_g - 3)y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell + 1)}{C\sigma^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3,$$

$$\frac{dy_2}{d \ln r} = (C\sigma^2 - A + U\delta_{l,0})y_1 + (1 + A - U)y_2 - Ay_3,$$

$$\frac{dy_3}{d \ln r} = (1 - U)y_3 + y_4,$$

$$\frac{dy_4}{d \ln r} = UAy_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell + 1) - UV_g]y_3 - Uy_2.$$

gdzie

$$C = 3\left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{M}{M_r}$$

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{d \ln r} = \frac{gr}{c^2}$$

$$A = -\frac{d \ln \rho}{d \ln r} - V_g$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r}$$

$A < 0 \rightarrow$  niestabilność konwektywna

Do znalezienia częstotliwości własnych modów oscylacji dla realistycznych modeli gwiazdowych musimy znać :  
 $C, V, A, U, \Gamma_1$ , w funkcji odległości od centrum  $x=r/R$  oraz średnią gęstość ,  $\langle \rho \rangle$ .

# WARUNKI BRZEGOWE

## WEWNĘTRZNY (CENTRUM)

$$V_g \propto A \propto r^2, C \rightarrow 3\frac{\bar{\rho}}{\rho}, U \rightarrow 3.$$

$$y_k = x^s \sum_{j=0} B_{k,j} x^j.$$

$$y_2 = \frac{3\sigma^2 \bar{\rho}}{\ell \rho} y_1, \quad y_4 = \ell y_3 \quad \text{dla } \ell > 0$$

$$y_2 = \frac{3}{V_g} y_1 \quad \text{dla } \ell = 0$$

## ZEWNĘTRZNY (POWIERZCHNIA)

$$x \approx 1, C \approx 3, V \gg 1, A \gg 1 \text{ i } U \ll 1.$$

$$y_4 = -(\ell + 1)y_3.$$

jeśli  $p(R) = 0$

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

jeśli  $p(R)$  ma skończoną wartość

$$y_1 \left( 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2}{V} \right) - y_2 + y_3 \left( 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1}{V} \right) = 0$$

# **RADIALNE PULSACJE ADIABATYCZNE**

**Dla  $\ell=0$  pierwsze równanie pulsacyjne redukuje się do**

$$\frac{p'}{\rho c^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \xi_r \right) - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\ln p}{dr} \xi_r$$

**podstawiamy do 3-go równania pulsacyjnego i otrzymujemy**

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = 4\pi G \left[ \rho \frac{d}{dr} \left( r^2 \xi_r \right) + r^2 \xi_r \frac{d\rho}{dr} \right]$$



całkujemy zakładając, że  $d\Phi'/dr$  nie jest osobliwe dla  $r=0$

$$\frac{d\Phi'}{dr} = 4\pi\rho\xi_r$$

Podstawiamy te związki do drugiego równania pulsacyjnego  
i korzystamy z relacji dla stanu równowagowego

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

otrzymujemy równanie różniczkowe  
na adiabaticzne pulsacje radialne  
**LAWE – Linear Adiabatic Wave Equation**

$$\frac{d}{dr} \left[ \Gamma_1 p r^4 \frac{d}{dr} \left( \frac{\xi_r}{r} \right) \right] + \left\{ \rho \omega^2 r^4 + r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)p] \right\} \left( \frac{\xi_r}{r} \right) = 0$$

Równanie to z warunkami brzegowymi,  $\xi_r=0$  dla  $r=0$  oraz  $\delta p=0$  dla  $r=R$ , jest zagadnieniem typu **Sturma–Liouville’a** na wartości własne  $\omega^2$ , ze wszystkimi konsekwencjami (Wykład 2).

W przypadku radialnych pulsacji adiabatycznych zlinearyzowane równania możemy zapisać jako  $L_{ad}[\xi_r]=0$ , co wraz z warunkami brzegowymi stanowi zagadnienie typu **Sturma-Liouville'a**.

**L** - operator liniowy, w którym funkcje skalarne, występujące jako współczynniki, są niezależne od  $t$ ,  $\theta$  i  $\varphi$ .

**W zagadnieniu typu **S-L** spełnione są twierdzenia:**

- 1. Istnieje nieskończona liczba wartości własnych  $\omega_n^2$ .**
- 2.  $\omega_n^2$  są rzeczywiste i można je uporządkować następująco:  
 $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \dots$ , gdzie  $\omega_n^2 \rightarrow \infty$  dla  $n \rightarrow \infty$ .**
- 3. Funkcja własna  $y_0$  związana z najniższą częstotliwością,  $\omega_0^2$ , nie posiada węzłów w przedziale  $0 < r < R$  (mod fundamentalny). Dla  $n > 0$  funkcja własna  $y_n$  ma  $n$  węzłów ( $n$ -ty overtone).**
- 4. Znormalizowane funkcje własne  $y_n$  tworzą układ zupełny i spełniają relacje ortonormalności.**

# **NIERADIALNE PULSACJE ADIABATYCZNE**

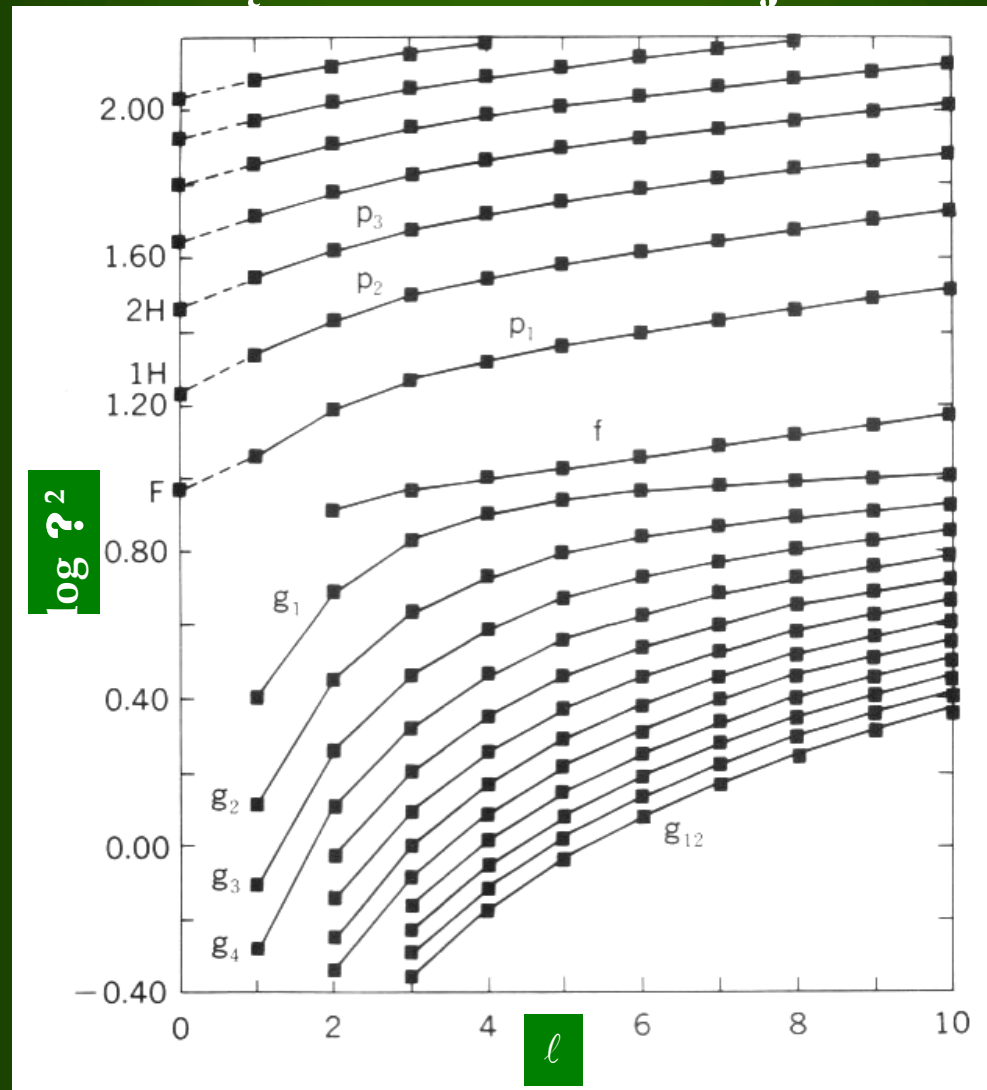
W przybliżeniu Cowlinga ( $\Phi'=0$ ) mamy dwa równania, w których są wyrazy proporcjonalne do  $\omega^2$  i  $1/\omega^2$

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p'$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p'$$

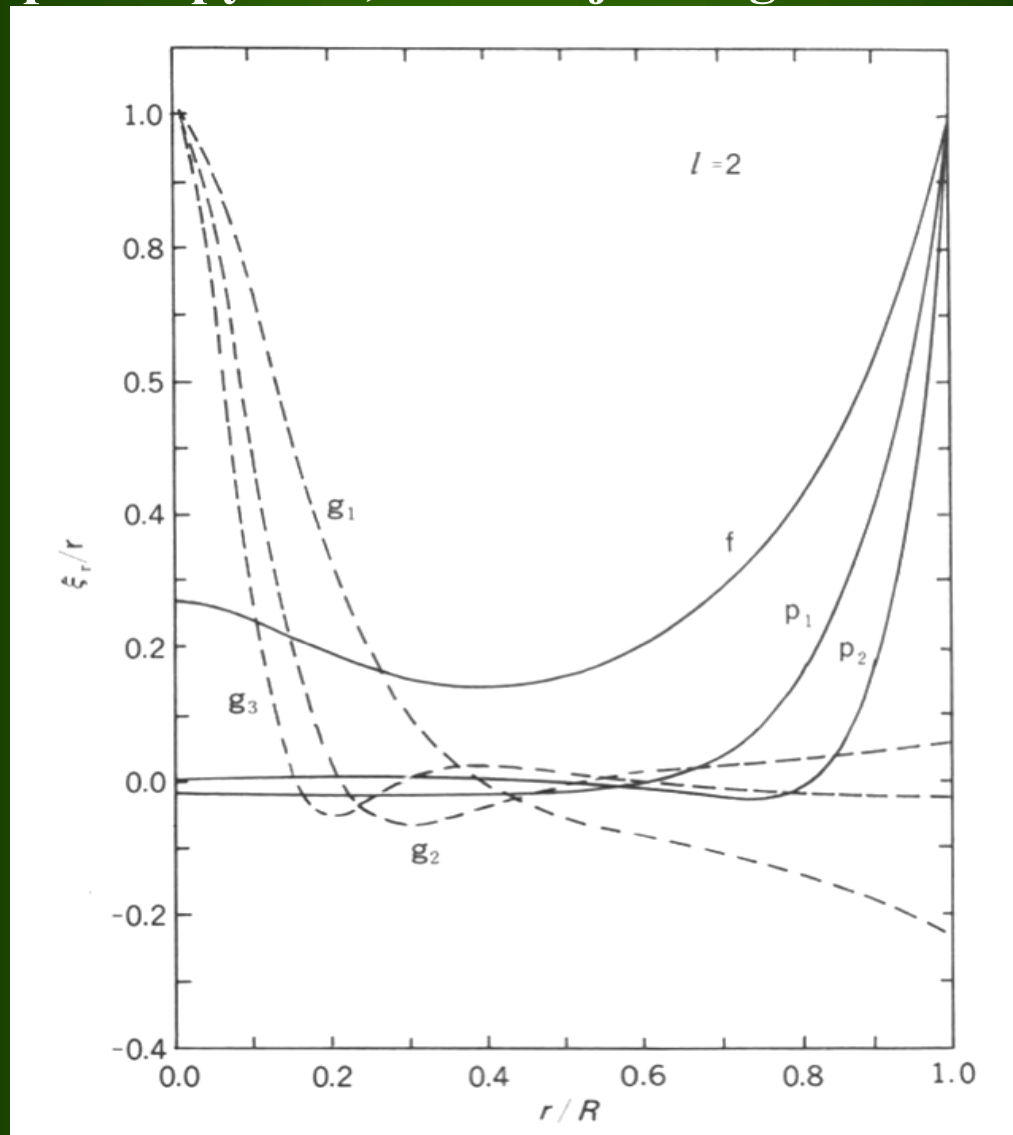
Dla przypadków asymptotycznych,  $\omega^2 \rightarrow \infty$  i  $\omega^2 \rightarrow 0$ , zagadnienie  $L[\xi_r]=0$  z warunkami brzegowymi staje się zagadnieniem Sturm–Liouville'a.

# Bezwymiarowa częstotliwość w funkcji $\ell$ dla politropy $n=3$



Dla danego  $n$  częstotliwość jest wyższa dla wyższych wartości  $\ell$ .

**Funkcje własne przesunięcia radialnego dla  $\ell = 2$ ,  
dla politropy  $n=3$ , w funkcji odległości od centrum.**





## OPERATOR OSCYLACJI ADIABATYCZNYCH

Pamiętamy, że równanie ruchu ma postać

$$\rho\omega^2\xi = \nabla p' + \rho\nabla\Phi' + \rho' \nabla\Phi$$



$$\rho\omega^2\xi = L(\xi)$$

Zagadnienie na rzeczywiste wartości własne  $\omega_k^2$   
i odpowiadające im wektory własne  $\xi_k$

Jeśli  $\omega_k^2 > 0$  to rozwiązanie opisuje mod oscylacji.

## OPERATOR OSCYLACJI ADIABATYCZNYCH

$L$  - operator hermitowski (liniowy, rzeczywisty, symetryczny)

$$\int \eta \cdot L(\xi) d^3 x = \int \xi \cdot L(\eta) d^3 x$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne

$$\int \xi_k^* \cdot \xi_j \rho d^3 x = I_k \delta_{k,j},$$

$I_k$  – moment bezwładności modu ( **inercja** )

$I_k$  małe – mody ciśnieniowe

$I_k$  duże – mody grawitacyjne

## ZASADA WARIACYJNA

S. Chandrasekhar (1964)

Ponieważ operator nieradialnych oscylacji adiabatycznych jest symetryczny  $\omega^2$  spełnia zasadę wariacyjną

$$\omega^2 I = \int \xi^* \cdot L(\xi) d^3 x$$

Prawa strona podzielona przez I jest ~stała  
ze względu na zmiany funkcji własnej  $\xi$   
(Chandrasekhar 1964)

Rozważmy model statyczny nieco różniący się od  
zadanego  $\rho = \rho_z + \Delta\rho$ ,  $L = L_z + \Delta L$ . Szukamy  $\Delta\omega$ .

$$\Delta\omega = \frac{\int \xi_z^* \cdot [\Delta L(\xi) - \omega_z^2 \Delta\rho \xi_z] d^3x}{2\omega_z I_z}$$

Czyli do wyliczenia poprawki do  $\omega$  nie trzeba  
wyliczać poprawek do wektorów własnych.

Czasami zapisujemy w postaci

$$\delta\omega^2 = \frac{\int_V \delta\mathbf{r}^* \cdot \delta\mathcal{F}(\delta\mathbf{r})\rho dV}{\int_V |\delta\mathbf{r}|^2 \rho dV}$$

Czyli efekt zaburzenia  $F$  na częstotliwości liczymy używając niezaburzonych funkcji własnych.

wzór ten pozwala na wyznaczenie poprawek  
do częstotliwości i parametrów budowy

np. dla Słońca  $\omega(c^2, \rho)$  i wyznaczamy

$$\delta_r c^2 / c^2 = [c_{\odot}^2(r) - c_{\text{mod}}^2(r)] / c^2(r)$$

$$\delta_r \rho / \rho = [\rho_{\odot}(r) - \rho_{\text{mod}}(r)] / \rho(r)$$