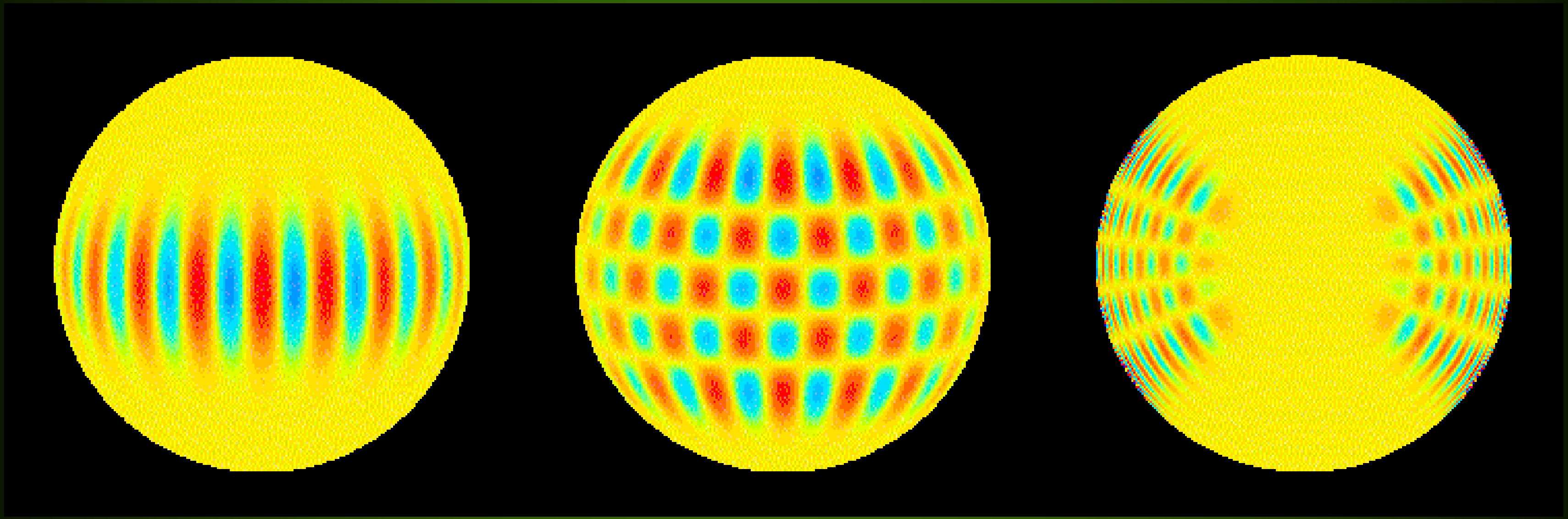


# PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2017/2018

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

# RÓWNANIA PULSACYJNE

- Analiza zaburzeń liniowych
- Zależności czasowe i kątowe
- liniowe równania nieadiabatyczne
- Przybliżenie adiabatyczne
- liniowe równania adiabatyczne

## Pulsacje o małych amplitudach

**małe zaburzenia wokół stanu równowagowego**

$$p(\mathbf{r},t) = p_0(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r},t)$$

$$p(\mathbf{r},t) = p_0(\mathbf{r}_0) + \delta p(\mathbf{r},t)$$

$$\xi = \delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

**LINEARYZACJA**

# Reguły komutacji

’ komutuje z ∂ i ∇

δ komutuje z *d*

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)' = \frac{\partial\rho'}{\partial t},$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\rho)' = \boldsymbol{\nabla}\rho',$$

$$\delta\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{d\delta\rho}{dt},$$

# równanie ciągłości

w zmiennych Eulera

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_0 \boldsymbol{v}\right) = 0$$

scałkowane po czasie

$$\rho' + \mathrm{div}\left(\rho_0 \boldsymbol{\delta r}\right) = 0$$

w zmiennych Lagrange'a

$$\delta\rho + \rho_0 \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\delta r}\right) = 0$$

## równanie ruchu

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta r}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho_0 \boldsymbol{g}' + \rho' \boldsymbol{g}_0$$

$$\boldsymbol{g}' = -\nabla \Phi'$$

**zaburzenie potencjału spełnia zaburzone równanie Poissona**

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'$$

**którego rozwiązaniem jest**

$$\Phi' = -G \int_V \frac{\rho'(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

# równanie energii

**korzystając z następującej własności**

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p'}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\delta r}}{\partial t} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial}{\partial t}(\delta p) .$$

**dostaniemy**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\, \delta Q}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left( \frac{\partial\, \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial\, \delta \rho}{\partial t} \right) \\ &= c_{P,0} \left( \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{\Gamma_{2,0} - 1}{\Gamma_{2,0}} \frac{T_0}{p_0} \frac{\partial \delta p}{\partial t} \right) . \end{aligned}}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta Q}{\partial t} = \delta(\rho\varepsilon - \nabla \cdot \mathcal{F}) = (\rho\varepsilon - \nabla \cdot \mathcal{F})'$$

$$\varepsilon = f(\rho, T, \{X_i\}) \Rightarrow \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln \rho}\right)_{T,X_i} \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln T}\right)_{\rho,X_i} \frac{\delta T}{T_0};$$

**Zaburzenie strumienia promienistego:**

$$\mathcal{F}' = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0$$

# ZALEŻNOŚCI CZASOWE I KĄTOWE

**Zakładamy symetrię sferyczną i czasową niezależność dla modelu równowagowego. Wówczas rozwiązanie możemy rozdzielić w czasie oraz we współrzędnych kątowych**

$$p'(r,\theta,\varphi,t) = p'(r)\, f(\theta,\varphi)\, \exp(-i\omega t)$$

$f(\theta,\varphi)$ **– funkcja opisująca zależności kątowe, którą wyznaczymy**

$p'(r)$ **- amplituda zmian danej wielkości fizycznej**

**zależność czasową zakładamy w postaci** $\exp(-i\omega t)$

**Wówczas równanie ruchu ma postać**

$$\rho\omega^2\xi = \nabla p' + \rho\nabla\Phi' + \rho' \nabla\Phi$$

**i ma charakter liniowego zagadnienia na wartości własne do wartości własnej $\omega^2$.**

**Prawa strona - liniowy operator , $L(\xi)$.**

**Aby otrzymać *f(θ,φ)* wyrażamy ξ jako**

$$\xi = \delta \mathbf{r} = \xi_r \, \mathbf{a}_r + \xi_h$$

$$\boxed{\nabla_{\mathrm{h}}^2 f = -\frac{1}{r^2}\Lambda f}$$

$$\Lambda = l(l+1)$$

$$f(\theta,\varphi) = N_\lambda^m P_\lambda^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} = Y_\lambda^m(\theta,\varphi)$$

**Czyli zmienne zapisujemy w postaci**

$$\xi_r(r,\theta,\varphi,t)=\tilde{\xi}_r(r)\, Y_\lambda^m(\theta,\varphi)\, \exp(-i\omega t)$$

$$p'(r,\theta,\varphi,t)=\tilde{p}'(r)\, Y_\lambda^m(\theta,\varphi)\, \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{\xi} = \left[\tilde{\xi}_r(r), \tilde{\xi}_h(r)\frac{\partial}{\partial\theta}, \tilde{\xi}_h(r)\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\right] Y_\ell^m(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$\tilde{\xi}_r$, $\tilde{\xi}_h$ - **średnie przesunięcie radialne i horyzontalne**

$$\tilde{\xi}_h(r) = \frac{1}{\omega^2 r}\left(\frac{p'}{\rho} + \Phi'\right)$$ **- horyzontalna składowa**

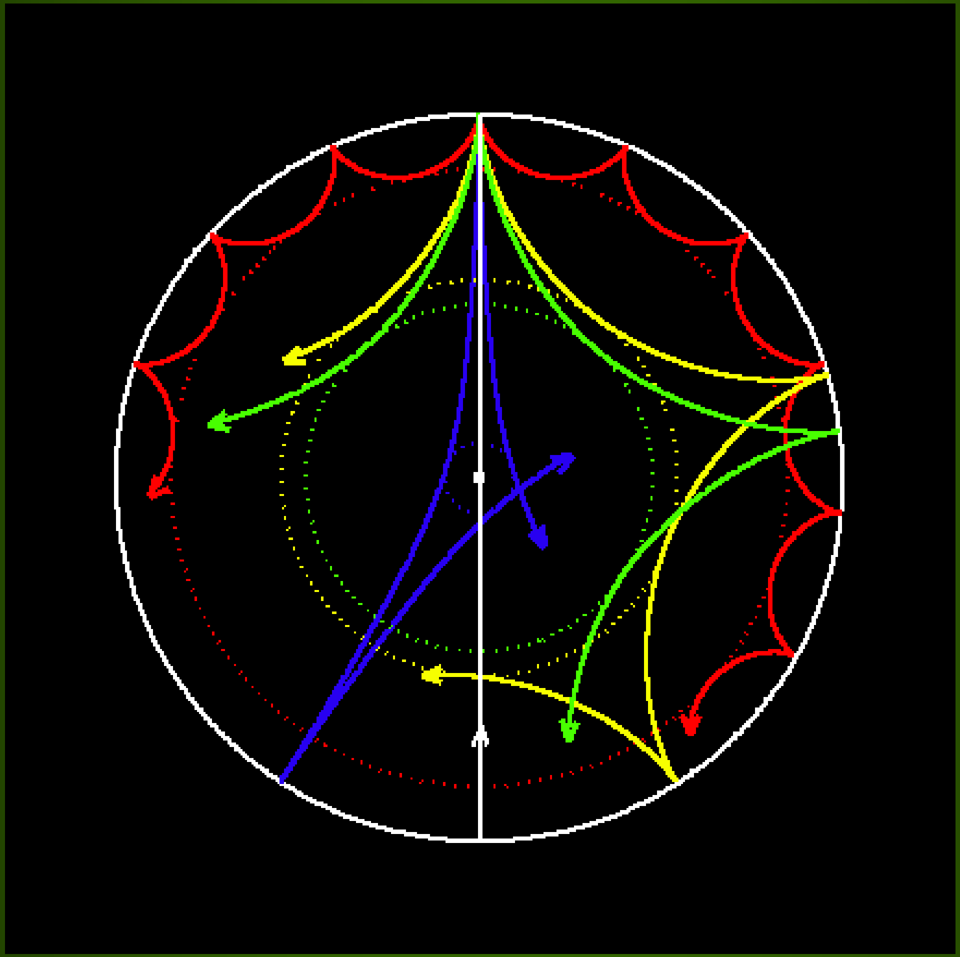
**składowa tangencjalna liczby falowej w lokalnym przybliżeniu oscylacji jako fali płaskiej, $k_h$**

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \simeq k_{\mathrm{h}}^2\ ;$$

**horyzontalna długość fali na powierzchni**

$$\lambda_{\mathrm{h}} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{h}}} \simeq \frac{2\pi R}{\sqrt{l(l+1)}}\ ;$$

# propagacja fali dźwiękowej



kropkowane kółka- wewnętrzne punkty odbicia

**równania pulsacyjne przekształcamy do następującej postaci (wielkości równowagowe są bez indeksów!)**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\xi_r\right) + \frac{1}{\Gamma_1}\xi_r\frac{\partial \ln p}{\partial r} + \left(\frac{\rho}{p\Gamma_1} + \frac{\nabla_h^2}{\omega^2}\right)\frac{p'}{\rho} + \frac{\nabla_h^2}{\omega^2}\Phi' = \frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{p\Gamma_1}\delta Q$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{g\rho}{p\Gamma_1}\right)p' - (\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g\frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{p\Gamma_1}\delta Q$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right) + \nabla_h^2\Phi' - 4\pi G\rho\left(\frac{p'}{p\Gamma_1} + \xi_r\frac{N^2}{g}\right) = -4\pi G\frac{\rho^2}{p}\frac{(\Gamma_3 - 1)}{\Gamma_1}\delta Q$$

$$\mathcal{F}_r' = -K\frac{\partial T'}{\partial r} - K'\frac{\partial T}{\partial r}, \quad \mathcal{F}_h' = -K\nabla_h T', \quad K = \frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3$$

$$-\mathrm{i}\omega\rho\delta Q = (\rho\varepsilon)' - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathcal{F}'\right) + \nabla_h^2(KT')$$

$$\delta Q = \frac{p}{\rho(\Gamma_3 - 1)}\left(\frac{\delta p}{p} - \Gamma_1\frac{\delta\rho}{\rho}\right)$$

**Mając separacje zmiennych równania pulsacyjne redukują się do zwyczajnych równań różniczkowych na funkcje amplitudy danych wielkości fizycznych.**

**Zakładając perturbacje $\xi_r$ , $p'$, $T'$, $\delta Q$ , $\Phi'$, $F_r'$ w postaci**

$$p'(r,\theta,\varphi,t) = p'(r)\, Y_\lambda^m(\theta,\varphi)\, \exp(-i\omega t)$$

**dostaniemy** →

## -otrzymamy równania na *p'(r)*, …

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\xi_r\right)+\frac{1}{\Gamma_1}\xi_r\frac{\partial \ln p}{\partial r}+\left(1-\frac{S_\ell^2}{\omega^2}\right)\frac{p'}{\rho c^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2}\Phi'=\frac{(\Gamma_3-1)}{c^2}\delta Q$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{g}{c^2}\right)p'-(\omega^2-N^2)\xi+\frac{\partial\Phi'}{\partial r}=g\frac{(\Gamma_3-1)}{c^2}\delta Q$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Phi'-4\pi G\rho\left(\frac{p'}{\rho c^2}+\xi_r\frac{N^2}{g}\right)=-4\pi G\rho\frac{(\Gamma_3-1)}{c^2}\delta Q$$

$$\mathcal{F}_r'=-K\frac{\partial T'}{\partial r}-K'\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$-\mathrm{i}\omega\rho\delta Q=(\rho\varepsilon)'-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathcal{F}'\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(KT')$$

$$\delta Q=\frac{p}{\rho(\Gamma_3-1)}\left(\frac{\delta p}{p}-\Gamma_1\frac{\delta\rho}{\rho}\right)$$

$$\boxed{c^2 = \frac{\Gamma_1 p}{\rho}}$$

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} = k_\mathrm{h}^2 c^2 \ ,$$

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right) \ .$$

**Równania te są podstawowymi równaniami dla liniowych nieradialnych pulsacji nieadiabatycznych z sześcioma zmiennymi: $\xi_r$ , $p'$, $T'$, $\delta Q$ , $\Phi'$, $F_r'$ .**

**Równanie te wraz z warunkami brzegowymi pozwalają na znalezienie wszystkich wartości własnych i odpowiadających im funkcji własnych.**

**Rząd azymutalny, m, nie występuje w równaniach pulsacyjnych. Zaniedbanie rotacji, pola magnetycznego etc. prowadzi do $(2\lambda+1)$-krotnej degeneracji częstotliwości, $\omega^2$, i radialnych funkcji własnych.**

# WARUNKI BRZEGOWE W CENTRUM

**dla $r\approx 0$ współczynniki w równaniach pulsacyjnych zachowują się następująco: $g\sim 0$ , $\rho\sim$const , $c^2\sim$const , $S_\lambda^2 \sim 1/r^2$ , $N^2\sim 0$ , $N^2/g\sim 0$**

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_r\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\left(\frac{p'}{\rho} + \Phi'\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dr} - \omega^2\xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'}{dr}\right) - \ell(\ell+1)\Phi' = 0$$

**szukamy rozwiązań typu $r^\lambda$, $r^{-(\lambda+1)}$, $r^{\lambda-1}$**

$$\frac{d\Phi'}{dr} - \frac{\ell\Phi'}{r} = 0$$

$$\xi_r = \ell\xi_h$$

$$\delta Q = 0$$

# WARUNKI BRZEGOWE NA POWIERZCHNI r=R

$$\delta p = 0$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{(\ell + 1)\Phi'}{r} = 0$$

$$\xi_r = \frac{p'}{g\rho}$$

$$\mathcal{F}_r = f_E J = f_E \frac{\sigma_{\mathrm{rad}}}{\pi} T^4$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}_r}{\mathcal{F}_r} = \frac{\delta f_E}{f_E} + 4\frac{\delta T}{T}$$

# PRZYBLIŻENIE ADIABATYCZNE

**W wielu przypadkach wyraz grzania $\partial\delta Q/\partial t$ możemy zaniedbać.**

**Takie przybliżenie znacznie upraszcza zagadnienie.**

**Aby uzasadnić jego użycie rozważmy:**

$$\boxed{\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{T}{p}\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \frac{1}{c_P}\frac{\partial\, \delta Q}{\partial t} = \frac{1}{c_P}\delta\left(\varepsilon - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}\right)}$$

**Zakładając, że δT dominuje w równaniu dyfuzyjnym dostaniemy**

$$\frac{1}{\rho c_P}\delta(\operatorname{div}\mathcal{F}) \sim \frac{\delta T}{\tau_F},$$

**gdzie**

$$\tau_F = \frac{3\kappa\rho^2 c_P \ell^2}{4a\tilde{c}T^3} \simeq 10^{12}\,\frac{\kappa\rho^2\ell^2}{T^3}$$ **[cgs]**

## $\tau_F \approx \tau_{KH} >> P$ - przybliżenie adiabatyczne jest dobre

**Dla przybliżenia adiabatycznego mamy**

$$\frac{\partial\, \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{\partial\, \delta \rho}{\partial t} = 0$$

**całkując po czasie dostaniem**

$$\delta p = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \delta \rho .$$

**w formalizmie Eulera mamy**

$$p' + \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} p = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} (\rho' + \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho)$$

**W przybliżeniu adiabatycznym ($\delta Q=0$)**

**mamy tylko zmienne: $\xi_r$ , $p'$, $\Phi'$**

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)p' - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2}\Phi' ,$$

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}p' + \rho\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r} ,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\left(\frac{p'}{c^2} + \frac{\rho\xi_r}{g}N^2\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi' .$$

$$c^2 = \frac{\Gamma_1 p}{\rho}$$

## PRZYBLIŻENIE COWLINGA, $\Phi' = 0$

Znacznie upraszcza równania pulsacyjne.

Założenie: wkład do zmian $\Phi$ z jednej części gwiazdy jest prawie całkowicie znoszony przez wkłady z innych części gwiazdy.

Ogólnie przybliżenie Cowlinga jest dobre dla $\lambda \geq 2$, oraz wysokich owertonów (duże $n$), oraz wszędzie tam gdzie $U=4\pi\rho r^3/M_r$ jest małe.

**Jeśli $\Phi$'=0 to na powierzchni**

$$\xi_r = \xi_h \sigma^2$$

$\sigma^2$ **- bezwymiarowa częstotliwość oscylacji**

$$\sigma^2 = \omega^2 R^3/GM$$

# FORMALIZM DZIEMBOWSKIEGO

**Dziembowski (1977, AcA 21, 289) podał bardzo użyteczną postać równań pulsacyjnych wprowadzając bezwymiarowe zmienne.**

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}$$

$$y_2 = \frac{1}{gr}\left(\frac{p'}{\rho} + \Phi'\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{gr}\Phi'$$

$$y_4 = \frac{1}{g}\frac{d\Phi'}{dr}$$

**Zmienne te mają ten sam rząd wielkości, dlatego nie tracimy znacząco na dokładności w obliczeniach numerycznych.**

**Sformułowanie to pozwala na bezpośrednie porównanie własności pulsacyjnych gwiazd o znacznie różnych parametrach gwiazdowych , np. białe karły a olbrzymy.**

**po wstawieniu zmiennych bezwymiarowych do wcześniej poznanych równań pulsacyjnych otrzymamy:**

$$\frac{dy_1}{d\ln r} = (V_g - 3)y_1 + [\frac{\ell(\ell+1)}{C\sigma^2} - V_g]y_2 + V_g y_3,$$

$$\frac{dy_2}{d\ln r} = (C\sigma^2 - A + U\delta_{l,0})y_1 + (1 + A - U)y_2 - Ay_3,$$

$$\frac{dy_3}{d\ln r} = (1 - U)y_3 + y_4,$$

$$\frac{dy_4}{d\ln r} = UAy_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell+1) - UV_g]y_3 - Uy_2.$$

**gdzie**

$$C = 3(\frac{r}{R})^3 \frac{M}{M_r}$$

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln P}{d\ln r} = \frac{gr}{c^2}$$

$$A = -\frac{d\ln\rho}{d\ln r} - V_g$$

$$U = \frac{d\ln M_r}{d\ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r}$$

***A*< 0 → niestabilność konwektywna**

Do znalezienia częstotliwości własnych modów oscylacji dla realistyczych modeli gwiazdowych musimy znać :

$C, V, A, U, \Gamma_1$ , w funkcji odległości od centrum $x=r/R$ oraz średnią gęstość , $\langle\rho\rangle$.

# WARUNKI BRZEGOWE

# WEWNĘTRZNY (CENTRUM)

$$V_g \propto A \propto r^2,\ C \rightarrow 3\frac{\bar{\rho}}{\rho},\ U \rightarrow 3.$$

$$y_k = x^s \sum_{j=0} B_{k,j} x^j .$$

$$y_2 = \frac{3\sigma^2 \bar{\rho}}{\ell \rho} y_1, \qquad y_4 = \ell y_3 \qquad \text{dla} \quad \ell > 0$$

$$y_2 = \frac{3}{V_g} y_1 \qquad \text{dla} \quad \ell = 0$$

# ZEWNĘTRZNY (POWIERZCHNIA)

$x \approx 1$, $C \approx 3$, $V >> 1$, $A >> 1$ i $U << 1$.

$$y_4 = -(\ell + 1) y_3 .$$

jeśli $p(R) = 0$

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

jeśli $p(R)$ ma skończoną wartość

$$y_1 \left( 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2}{V} \right) - y_2 + y_3 \left( 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1}{V} \right) = 0$$

# RADIALNE PULSACJE ADIABATYCZNE

**Dla λ=0 pierwsze równanie pulsacyjne redukuje się do**

$$\frac{p'}{\rho c^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_r\right) - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\ln p}{dr}\xi_r$$

**podstawiamy do 3-go równania pulsacyjnego i otrzymujemy**

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'}{dr}\right) = 4\pi G\left[\rho\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_r\right) + r^2\xi_r\frac{d\rho}{dr}\right]$$

**całkujemy zakładając, że dΦ’/dr nie jest osobliwe dla r=0**

$$\frac{d\Phi'}{dr} = 4\pi\rho\xi_r$$

**Podstawiamy te związki do drugiego równania pulsacyjnego i korzystamy z relacji dla stanu równowagowego**

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \qquad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho$$

**otrzymujemy równanie różniczkowe**

**na adiabatyczne pulsacje radialne**

**LAWE – Linear Adiabatic Wave Equation**

$$\frac{d}{dr}\left[\Gamma_1 p r^4 \frac{d}{dr}\left(\frac{\xi_r}{r}\right)\right] + \left\{\rho\omega^2 r^4 + r^3 \frac{d}{dr}\left[(3\Gamma_1 - 4)p\right]\right\}\left(\frac{\xi_r}{r}\right) = 0$$

**Równanie to z warunkami brzegowymi, $\xi_r$=0 dla r =0 oraz $\delta p$ =0 dla r=R, jest zagadnieniem typu Sturma–Liouville'a na wartości własne $\omega^2$, ze wszystkim konsekwencjami (Wykład 2).**

**W przypadku radialnych pulsacji adiabatycznych zlinearyzowane równania możemy zapisać jako $L_{ad}[\xi_r]=0$, co wraz z warunkami brzegowymi stanowi zagadnienie typu Sturma-Liouville'a.**

**L - operator liniowy, w którym funkcje skalarne, występujące jako współczynniki, są niezależne od t, $\theta$ i $\varphi$.**

**W zagadnieniu typu S-L spełnione są twierdzenia:**

1. **Istnieje nieskończona liczba wartości własnych $\omega_n^2$.**

2. **$\omega_n^2$ są rzeczywiste i można je uporządkować następująco:**
   **$\omega_0^2 < \omega_1^2 <$ ..., gdzie $\omega_n^2 \to \infty$ dla $n \to \infty$.**

3. **Funkcja własna $y_0$ związana z najniższą częstotliwością , $\omega_0^2$, nie posiada węzłów w przedziale $0<r<R$ (mod fundamentalny). Dla $n>0$ funkcja własna $y_n$ ma n węzłów (n-ty overton).**

4. **Znormalizowane funkcje własne $y_n$ tworzą układ zupełny i spełniają relacje ortonormalności.**

# NIERADIALNE  PULSACJE  ADIABATYCZNE

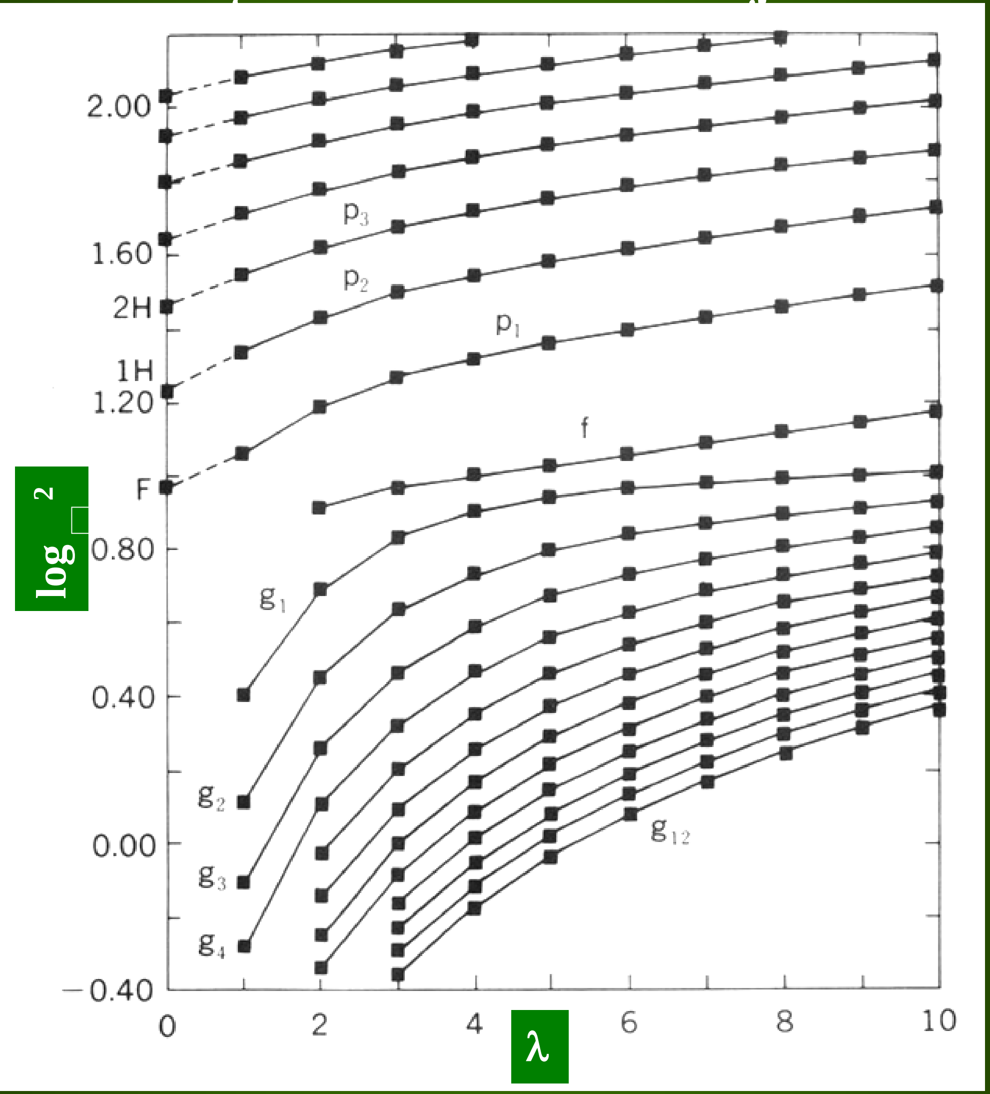
**W przybliżeniu Cowlinga ($\Phi'=0$) mamy dwa równania, w których są wyrazy proporcjonalne do $\omega^2$ i $1/\omega^2$**

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)p'$$

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}p'$$

**Dla przypadków asymptotycznych, $\omega^2 \to \infty$ i $\omega^2 \to 0$, zagadnienie $L[\xi_r]=0$ z warunkami brzegowymi staje się zagadnieniem Sturma–Liouville'a.**

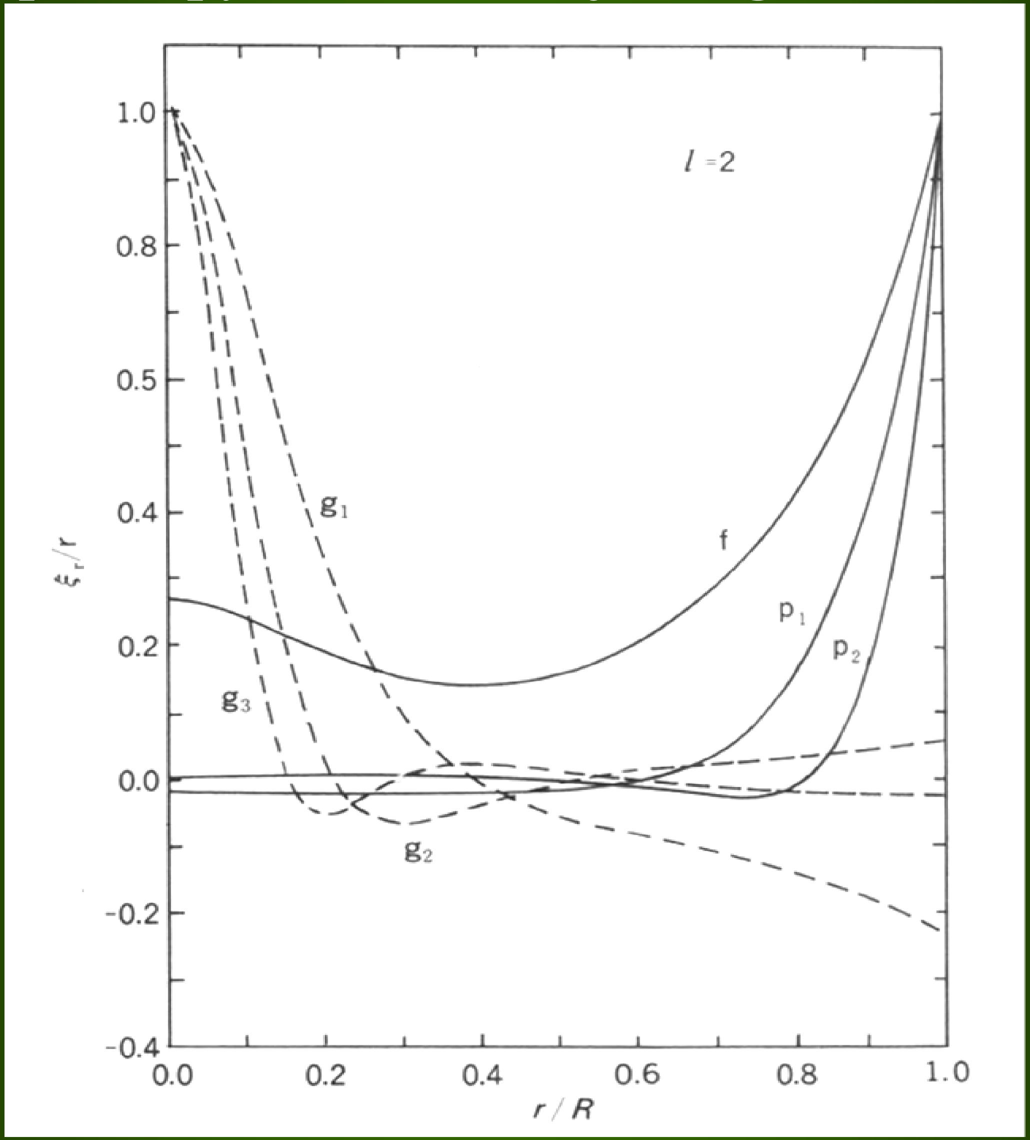
**Bezwymiarowa częstotliwość w funkcji λ dla politropy n=3**




**Dla danego n częstotliwość jest wyższa dla wyższych wartości λ.**

**Unno et al. 1989**

# Funkcje własne przesunięcia radialnego dla λ =2, dla politropy n=3, w funkcji odległości od centrum.




Unno et al. 1989

# OPERATOR OSCYLACJI ADIABATYCZNYCH

**Pamiętamy, że równanie ruchu ma postać**

$$\rho\omega^2\xi = \nabla p' + \rho\nabla\Phi' + \rho'\nabla\Phi$$

$$\rho\omega^2\xi = L(\xi)$$

**Zagadnienie na rzeczywiste wartości własne $\omega_k{}^2$**

**i odpowiadające im wektory własne $\xi_k$**

**Jeśli $\omega_k{}^2 > 0$ to rozwiązanie opisuje mod oscylacji.**

# OPERATOR OSCYLACJI ADIABATYCZNYCH

*L* - operator hermitowski (liniowy, rzeczywisty, symetryczny)

$$\int \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) d^3\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\eta}) d^3\boldsymbol{x}$$

$$\int \boldsymbol{\xi}_k^* \cdot \boldsymbol{\xi}_j \rho d^3\boldsymbol{x} = I_k \delta_{k,j},$$

$I_k$ – moment bezwładności modu ( **inercja** )

$I_k$ małe – mody ciśnieniowe

$I_k$ duże – mody grawitacyjne

## ZASADA WARIACYJNA

**S. Chandrasekhar (1964)**

**Ponieważ operator nieradialnych oscylacji adiabatycznych jest symetryczny $\omega^2$ spełnia zasadę wariacyjną**

$$\omega^2 I = \int \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) d^3\boldsymbol{x}$$

**Prawa strona podzielona przez I jest ~stała ze względu na zmiany funkcji własnej $\xi$ (Chandrasekhar 1964)**

**Rozważmy model statyczny nieco różniący się od zadanego $\rho = \rho_z + \Delta\rho$, $L = L_z + \Delta L$. Szukamy $\Delta\omega$ .**

$$\Delta\omega = \frac{\int \boldsymbol{\xi}_z^* \cdot [\Delta \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) - \omega_z^2 \Delta\rho \boldsymbol{\xi}_z] d^3\boldsymbol{x}}{2\omega_z I_z}.$$

**Czyli do wyliczenia poprawki do $\omega$ nie trzeba wyliczać poprawek do wektorów własnych.**

**Czasami zapisujemy w postaci**

$$\delta\omega^2 = \frac{\int_V \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}^* \cdot \delta\mathcal{F}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})\rho \mathrm{d}V}{\int_V |\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}|^2 \rho \mathrm{d}V}$$

**Czyli efekt zaburzenia $\mathcal{F}$ na częstotliwości liczymy używając niezaburzonych funkcji własnych.**

wzór ten pozwala na wyznaczenie poprawek do częstotliwości i parametrów budowy

np. dla Słońca $\omega(c^2,\rho)$ i wyznaczamy

$$\delta_r c^2/c^2 = [c^2_\odot(r) - c^2_{\mathrm{mod}}(r)]/c^2(r)$$

$$\delta_r \rho/\rho = [\rho_\odot(r) - \rho_{\mathrm{mod}}(r)]/\rho(r)$$