

PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2018/2019

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

SKALE CZASOWE

- ✱ dynamiczna, τ_{dyn}
- ✱ termiczna (Kelvina-Helmholtza), τ_{th}
- ✱ nuklearna, τ_{nuc}

★ Dynamiczna, τ_{dyn} – czas potrzebny na przebycie drogi R (promienia konfiguracji) przez element masy pod wpływem stałego przyspieszenia grawitacyjnego.

Dla gwiazdy jako całości jest to czas swobodnego spadku:

$$\tau_{\text{ff}} \approx (R^3/GM)^{1/2} = 0.453(M/M_{\odot})^{-1/2}(R/R_{\odot})^{3/2} \quad [\text{h}]$$

Lokalnie dynamiczna skala czasowa jest dana przez:

$$\tau_{\text{dyn}} = H/c, \quad \text{gdzie } H \text{ jest charakterystyczną skalą długości.}$$

Jest to czas jaki potrzebuje gwiazda, aby odejść od równowagi hydrodynamicznej na tyle, aby stan układu zmienił się znacząco.

Okres pulsacji jest rzędu dynamicznej skali czasowej !

Typowe wartości τ_{dyn} w różnych typach gwiazd:

GWIAZDA	ρ [g/cm ³]	$\tau_{\text{dyn}} \sim 1/\sqrt{G\rho}$
gwiazda neutronowa	10^{15}	0.06 ms
Biały karzeł	10^6	2 s
Słońce	1,41	26 min
Czerwony nadolbrzym	10^{-9}	2 lata

☀ Termiczna (Kelvina-Helmholtza), τ_{th}

Dla gwiazdy jako całości jest to czas przez jaki gwiazda może świecić kosztem kurczenia grawitacyjnego:

$$\tau_{th} \approx GM^2/(LR)$$

Jeśli wyrazimy M,R,L w jednostkach słonecznych:

$$\tau_{th} \approx 3.1 * 10^7 M^2/(LR) \text{ lat}$$

Lokalnie termiczna skala czasowa, τ_{th} , jest to tempem zmian **entropii** powodowanych odejściem od stanu równowagi termicznej:

$$\tau_{th} = \int_r^R T c_p dM/L$$

Równowaga termodynamiczna – istnieje jedna wartość temperatury określająca takie wielkości jak obsadzenie stanów energetycznych, rozkład prędkości cząstek, stan jonizacji, widmowy rozkład emisji termicznej.
Jest to stan o maksymalnym prawdopodobieństwie.

Entropia – miara liczby sposobów podziału energii wewnętrznej między poszczególne drobiny i poszczególne rodzaje ruchów. Im większa różnorodność (tj. nieuporządkowanie) tym większa entropia.

zazwyczaj $\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{th}} \ll 1$

dla Słońca $\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{th}} = 1.6 \cdot 10^{-12}$

**Procesy termiczne są bardzo wolne
w porównaniu z dynamicznymi.**

τ_{th}/τ_{dyn} – miara nieadiabatyczności

$\tau_{th}/\tau_{dyn} \gg 1$ - dany proces przebiega na tyle szybko, że wymiana ciepła między elementem a otoczeniem nie zdąży nastąpić. Wówczas podejście adiabatyczne jest dobrym przybliżeniem.

★ Nuklearna skala czasowa, τ_{nuc} , jest związana z reakcjami termojądrowymi. Określa tempo ewolucji gwiazdy na ciągu głównym:

$$\tau_{\text{nuc}} \approx 0.007 \alpha M c^2 / L \quad [\text{cgs}]$$

$$\alpha = 0.1 \quad \tau_{\text{nuc}} \approx 6 * 10^{17} M / L \quad [\text{cgs}]$$

M, L w jednostkach słonecznych: $\tau_{\text{nuc}} \approx 10^{10} M / L \text{ lat}$

$$\tau_{\text{th}}/\tau_{\text{nuc}} \approx 1.11 * 10^{-25} M/R \text{ (cgs)}$$

Dla gwiazd Ciągu Głównego stosunek ten jest zazwyczaj mały, co pozwala zaniedbać zmiany składu chemicznego badając procesy termiczne.

w przypadku Słońca mamy $\tau_{\text{th}}/\tau_{\text{nuc}} \approx 3.2 * 10^{-3}$

$$\tau_{dyn} \ll \tau_{th} \ll \tau_{nuc}$$

OGÓLNE RÓWNANIA HYDRODYNAMIKI

Zaniedbujemy efekty:

- rotacji
- pola magnetycznego
- lepkości
- itp.

równanie **ciągłości** (zachowania masy)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Jeśli zdefiniujemy $V_\rho = 1/\rho \rightarrow 1/V_\rho * dV_\rho/dt = \operatorname{div} \mathbf{v}$

czyli $\operatorname{div} \mathbf{v}$ jest tempem ekspansji.

równanie **ruchu** (zachowania pędu)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f},$$

lub

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}.$$

To ostatnie zwane jest równaniem Eulera.

Jako \mathbf{f} rozważamy tylko grawitacje, czyli $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g} = \nabla \Phi$

Φ spełnia równanie **Poissona**

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho,$$

równanie energii

Wychodzimy od I-wszej zasady termodynamiki

$$dE + p dV = dQ$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} .$$

wskazniki termodynamiczne (wykładniki adiabaty)

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}}, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{\text{ad}}$$
$$\Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}},$$

Korzystając ze wskaźników termodynamicznych możemy napisać

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \\ &= c_P \left(\frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right) \\ &= c_V \left[\frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right].\end{aligned}$$

Wyraz grzania z poprzednich równań możemy zapisać

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \rho\varepsilon - \operatorname{div} \mathcal{F}.$$

ε - tempo produkcji energii na jednostkę masy
 \mathcal{F} – strumień energii

Dla wnętrza zakładamy przybliżenie dyfuzyjne:

$$\mathcal{F}_{\text{rad}} = - \frac{4a\tilde{c}T^3}{3\kappa\rho} \nabla T ,$$

κ - współczynnik nieprzezroczystość
 a – stała promienista, c – prędkość światła

Przybliżenie adiabatyczne

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

Równanie stanu dla gazu doskonałego całkowicie zjonizowanego

$$p = \frac{k_B \rho T}{\mu m_u},$$

Wówczas $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 5/3$

RÓWNANIA WNETRZ GWIAZDOWYCH I EWOLUCJI

Zakładamy , że podczas ewolucji gwiazda jest w stanie równowagi hydrostatycznej:

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}_0 = \rho_0 \nabla \Phi_0$$

Równanie Poissona pozostaje bez zmian.

Jeśli gwiazda jest sferycznie symetryczna

$$g_0 = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 dr' = \frac{Gm_{r,0}}{r^2},$$

gdzie

$$m_{r,0} = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 dr'.$$

wówczas

$$\frac{dp_0}{dr} = -g_0\rho_0 = -\frac{Gm_{r,0}\rho_0}{r^2},$$

Równanie energii

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \mathcal{F}_{r,0}) = \rho \varepsilon_0 - \rho_0 \frac{dE_0}{dt} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt}$$

lub

$$\frac{dL_{r,0}}{dr} = 4\pi r^2 \left(\rho \varepsilon_0 - \rho_0 \frac{dE_0}{dt} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt} \right)$$

równanie zachowania **energii**

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g$$

L_r - strumień energii płynący przez warstwę o promieniu r

ε - tempo produkcji energii w reakcjach jądrowych

ε_ν - chłodzenie związane z emisją neutrin

ε_g - energia zużywana na ekspansję i kurczenie

$$\varepsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}$$

Równowaga termiczna

$$\cancel{\varepsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}} \quad \cancel{\varepsilon_\nu}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon$$

Przyrost strumienia promieniowania w warstwie o masie dm jest równy energii wyprodukowanej przez tę warstwę w reakcjach jądrowych

Równanie transportu energii

Jeśli strumień jest zdominowany przez promieniowanie, to przybliżenie dyfuzyjne bezpośrednio wiąże moc promieniowania z temperaturą

$$\frac{dT_0}{dr} = -\frac{3\kappa_0\rho_0}{16\pi r^2 a\tilde{c}T_0^3} L_{r,0}$$

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\sigma G} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$$

transport konwektywny

$$L_r = 4\pi r^2 (F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}})$$

Dane mikrofizyki

- równanie stanu, $P=P(\rho, T, X_i)$
- nieprzezroczystości materii, $\kappa=\kappa(\rho, T, X_i)$
- tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$

Równanie stanu

Gaz doskonały

$$P = NkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

dla gwiazd masywnych

$$P = \rho kT / (\mu m_H) + aT^4 / 3$$

Ciśnienie promieniowania

Gaz zdegenerowany

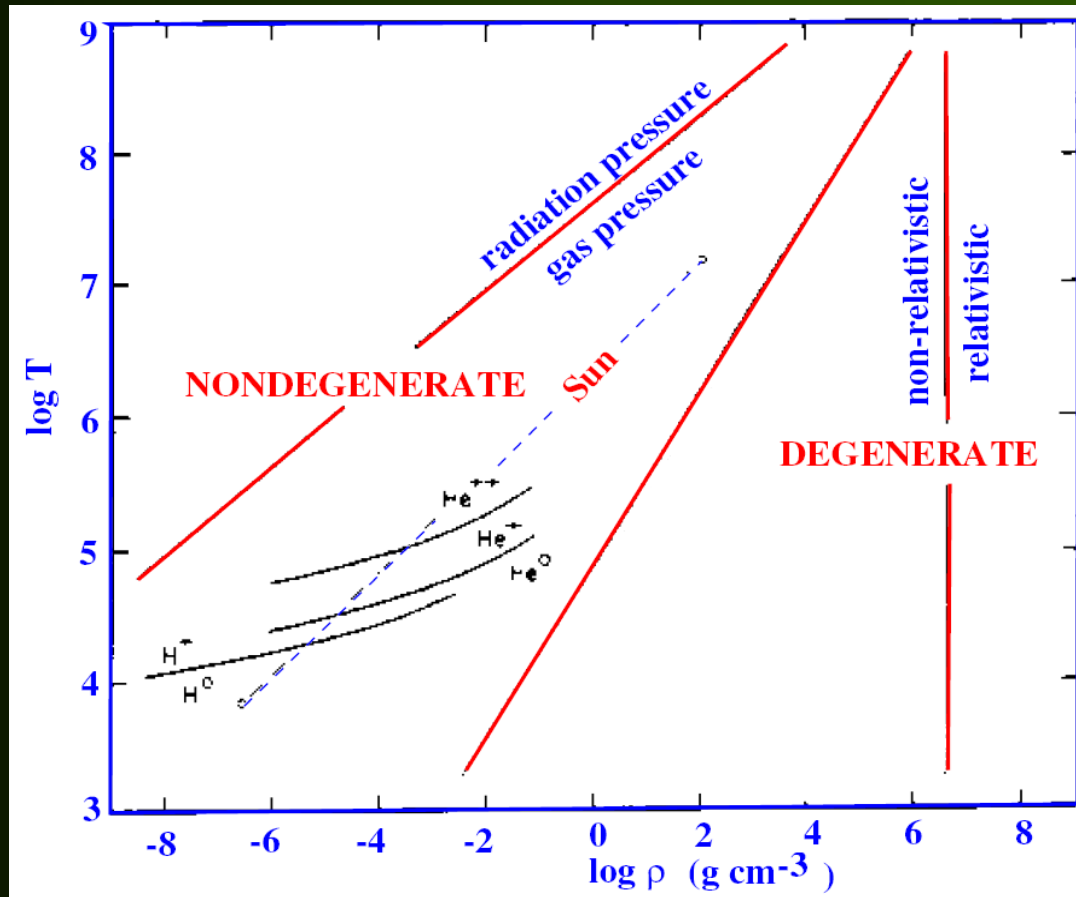
$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

$$K_{NR} = \frac{h^2}{20m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} = 1.0036 \times 10^{13} \text{ [cgs]}$$

$$P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

$$K_{ER} = \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} = 1.2435 \times 10^{15} \text{ [cgs]}$$

Równanie stanu



Schwarzschild 1958

Tablice OPAL: P, ρ, T, X_i

nieprzezroczystość materii, κ , zależy od

- ◆ temperatury
- ◆ gęstości
- ◆ składu chemicznego

nieprzezroczystość determinuje transport energii

Wysokie temperatury

$$\kappa = 0.02(1+X) \text{ (rozp. Thomsona)}$$

Pośrednie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho T^{-3.5} \text{ (wzór Kramersa)}$$

bardzo niskie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^4$$

W praktyce liczy się prawdopodobieństwa procesów, w których foton o energii $h\nu$ zostanie pochłonięty lub rozproszony.

metody perturbacyjne mechaniki kwantowe



przekroje czynne dla różnych procesów

**DO 1992 BYŁY TYLKO TABLICE
Z LOS ALAMOS (LAOL)**

OPAL

kilkoro fizyków z Livermore: F.J. Rogers, C.A. Iglesias i in.

1990 ApJ 360, 221

1992 ApJ 397, 717; ApJS 79, 507

1994 Science 263, 50

1996 ApJ 456, 902

OP (Opacity Project)

międzynarodowy zespół fizyków kierowany przez M.J. Seaton

1993 MNRAS 265, L25

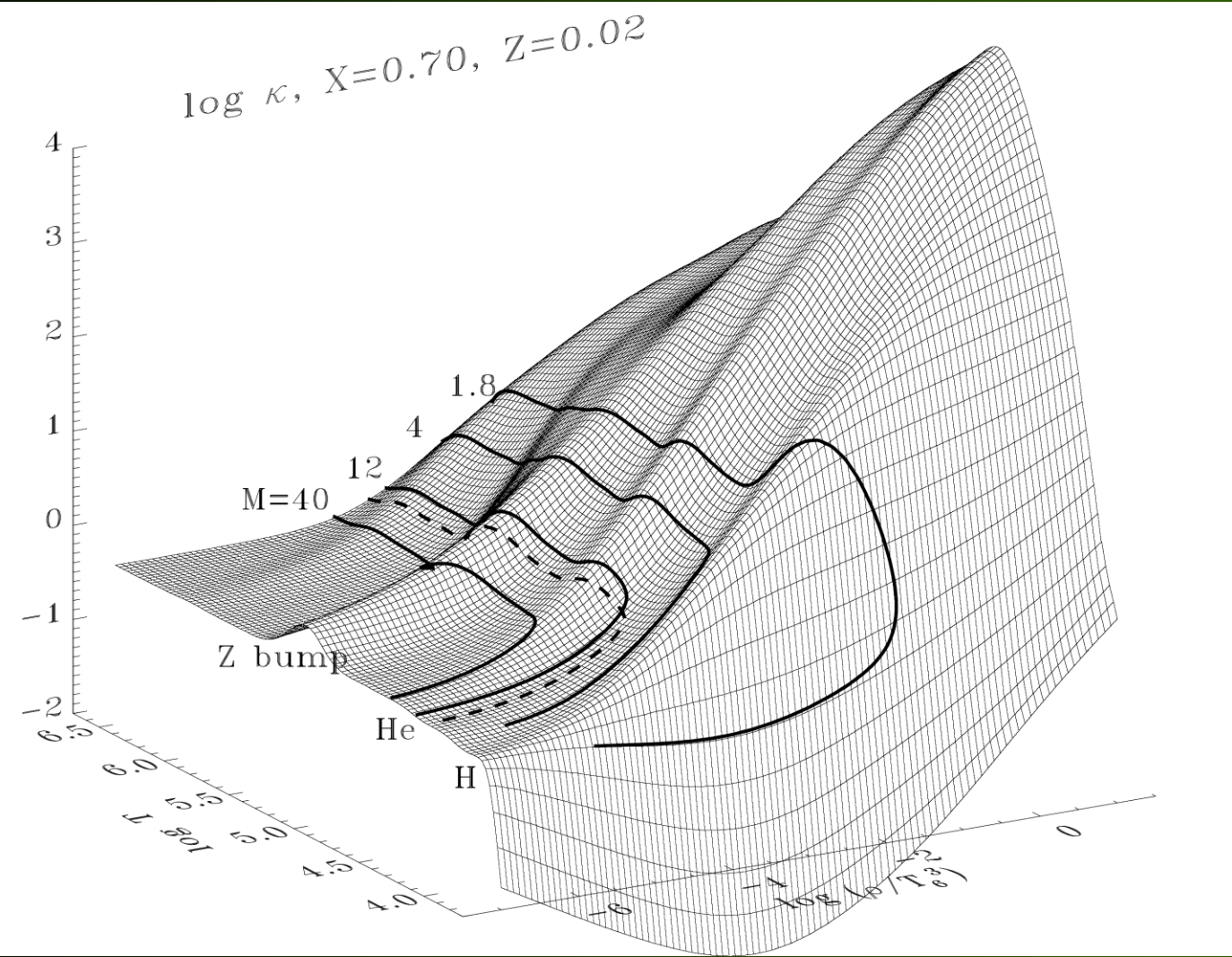
1996 MNRAS 279, 95

2005 MNRAS 360, 458, MNRAS 362, L1

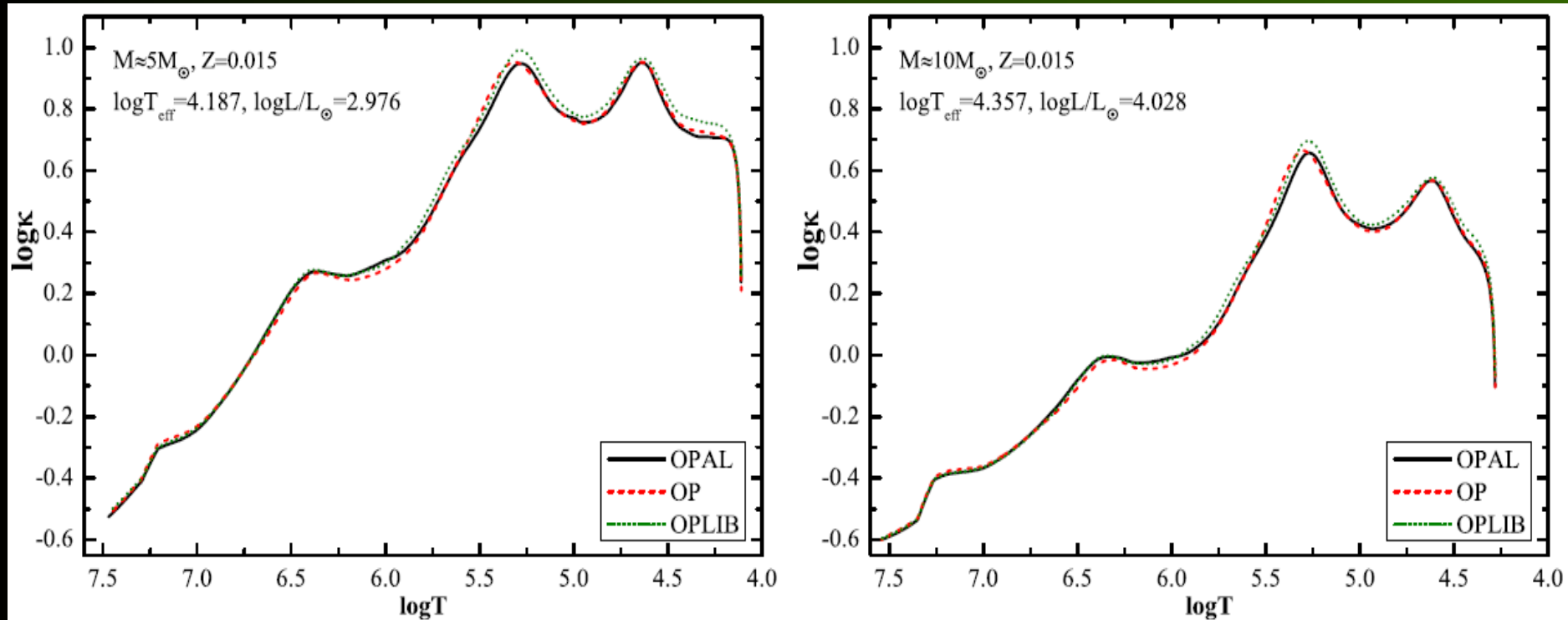
nowe Los Alamos (OPLIB)

Colgan i in. 2013, 2015

Nieprzezroczystość, κ (OPAL), w zależności od $\log T$ i $\log \rho/T_6^3$ ($T_6 = T/10^6$)



Średnia Rosselanda współczynnika κ we wnętrzach modeli $M=5$ i $10 M_{\odot}$



Tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$

- ✘ tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, X_i)$
- ✘ zmiany składu chemicznego
- ✘ strumień neutrin

Prawdopodobieństwo przeniknięcia bariery kulombowskiej (współczynnik Gamowa)

$$P_p(v) \propto \exp[-(4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2 / hv)]$$

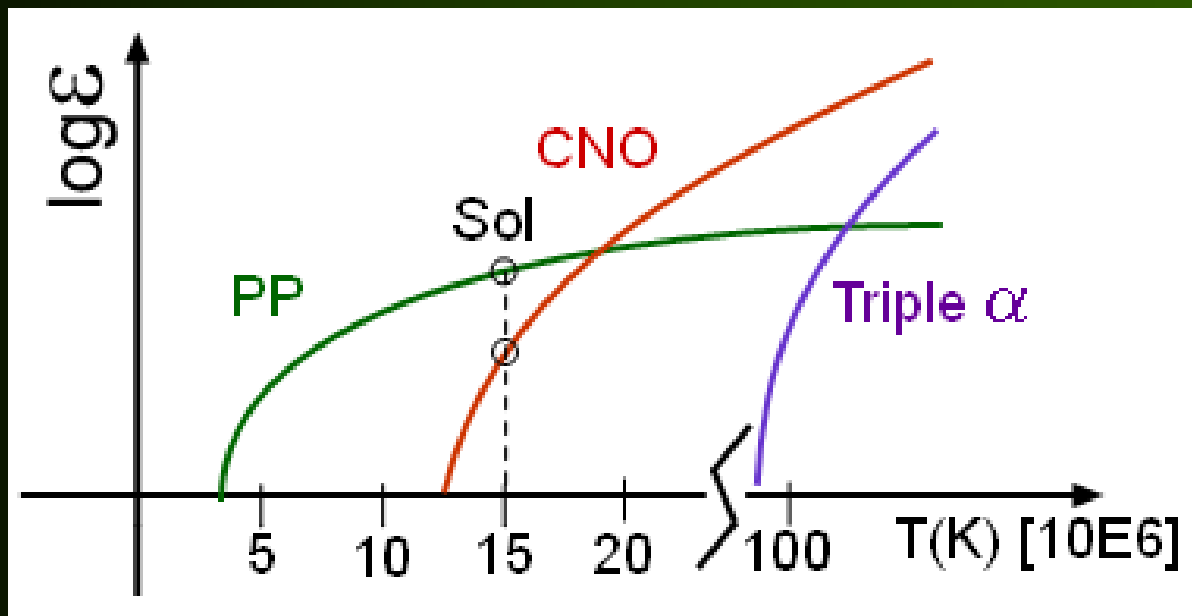
Tempo produkcji energii $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^{\eta_1} T^{\eta_2}$ erg/g/s

Cykl p-p $\varepsilon_{PP} \simeq \varepsilon_1 X_H^2 \rho T^4$

Cykl CNO $\varepsilon_{CNO} \simeq \varepsilon_2 X_H X_{CNO} \rho T^{20}$

Reakcja 3α $\varepsilon_{3\alpha} \simeq \varepsilon_3 X_{He}^3 \rho^2 T^{30}$.

Wydajność energetyczna reakcji



Słońce

- $pp \rightarrow 99\%$
- $CNO \rightarrow 1\%$

Zmiana składu chemicznego

Zazwyczaj uwzględniamy tylko zmiany składu chemicznego powodowane przez reakcje jądrowe.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right]$$

r_{ji} - tempo powstawania izotopu i z izotopu j

r_{ik} - tempo przemiany izotopu i w izotop k

RÓWNANIA BUDOWY WEWNĘTRZNEJ I EWOLUCJI

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \Delta\nabla & \text{if } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) \quad [+ \text{ mixing terms}] \quad i = 1 \dots N$$

Warunki brzegowe

W centrum: $m=0 \rightarrow r=0, L_r=0$

Na powierzchni: $m=M \rightarrow P=0, T=(L/8\pi R^2\sigma)^{1/4}$

W centrum gwiazdy musimy dopasować: ρ_c oraz T_c

na powierzchni: R oraz L

Mamy $4+I$ równań różniczkowych na
 $4+I$ niewiadome $r, P, T, L_r, X_1, \dots, X_I$
w funkcji (m, t)

Dla danego X_i i czasu t , rozwiążemy
równania na r, P, T, L_r

$$X(m, t + \Delta t) \approx X(m, t) + \Delta t r_X(m, t)$$

Dostajemy ciąg modeli ewolucyjnych, w którym model w czasie t_i zależy od modelu w czasie t_{i-1} .

Parametrem odróżniającym modele jest masa.

