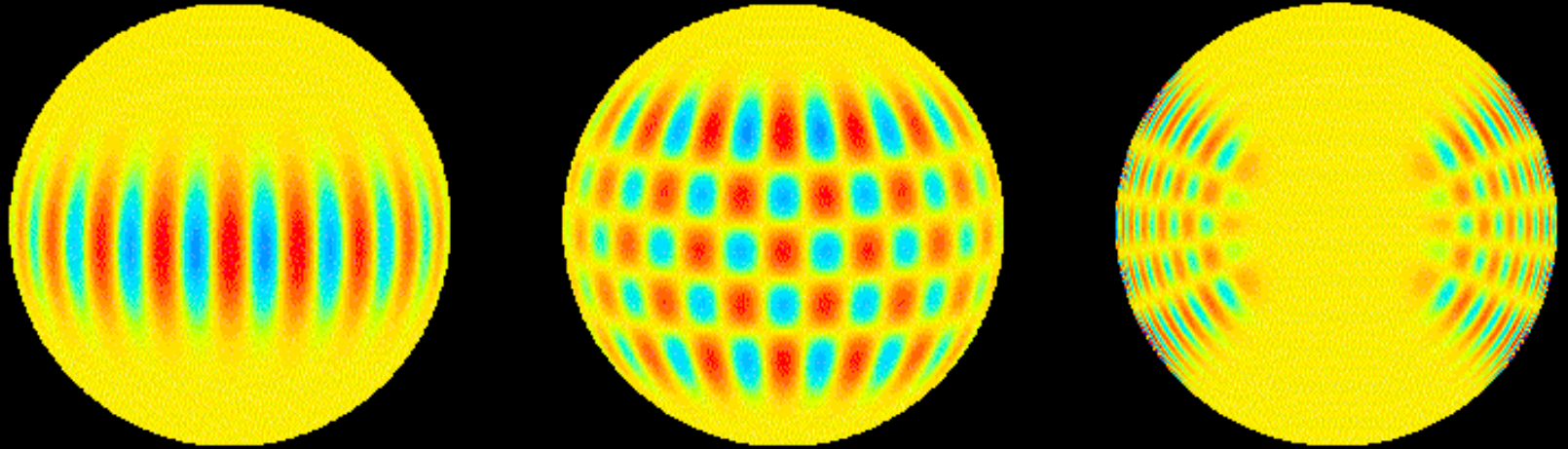




PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2017/2018

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

LITERATURA:

1. Jørgen Christensen-Dalsgaard, 2003,
Lecture Notes on Stellar Oscillations
2. C. Aerts, Jørgen Christensen-Dalsgaard, D. Kurtz, 2010,
Asteroseismology
3. Wykłady prof. W. Dziembowskiego
4. Unno E., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989,
Nonradial Oscillations of Stars
5. Cox J. P., 1980, *Theory of Stellar Pulsation*
6. Christensen-Dalsgaard & Dziembowski, 2000
Basic aspects of stellar structure and pulsation

RAMOWY PLAN WYKŁADU

1. Podstawowe własności oscylacji gwiazdowych.
Wybrane zagadnienia matematyczne.
2. Typy gwiazd pulsujących.
3. Pulsacje adiabatyczne.
4. Pulsacje nieadiabatyczne.
5. Mechanizmy napędzania pulsacji.
6. Efekty rotacji.

RAMOWY PLAN WYKŁADU

- 7. Pulsacyjne zmiany obserwowanych charakterystyk:
zmiany blasku, profilii linii widmowych**
- 8. Analiza periodogramowa.**
- 9. Metody identyfikacji modów pulsacji.**
- 10. Helioseismologia**
- 11. Asteroseismologia.**

Gwiazda pulsująca - gwiazda, której zmienność spowodowana jest przez zachodzące w niej pulsacje, czyli przez istnienie fal hydrodynamicznych (akustycznych lub/i wypornościowych)



Zmiany **jasności** lub/i **prędkości radialnej**

Mody oscylacji (pulsacyjne) – drgania odpowiadające różnym możliwym częstotliwościom (okresom)

Dwa ważne wyniki teorii pulsacji:

- występowanie częstości **harmonicznych**
- gwiazdy mogą pulsować **nieradialnie**

pulsacje radialne - gwiazda zmienia swój promień, ale we wszystkich fazach zachowana jest symetria sferyczna

pulsacje nieradialne - gwiazda jest podzielona na sektory drgające w przeciwnych fazach niż sąsiednie i przesuujące się po powierzchni gwiazdy

Dany mod pulsacji jest określony przez $\omega_{n\ell m}$ oraz trzy liczby kwantowe : n, ℓ, m .

$\omega_{n\ell m} = 2\pi\nu_{n\ell m}$ – częstotliwość kołowa

n - radialny rząd modu

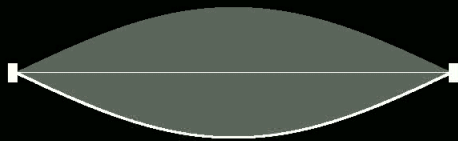
ℓ - stopień modu, $\ell=0,1,2, \dots$

m - rząd azymutalny, $|m| \leq \ell$

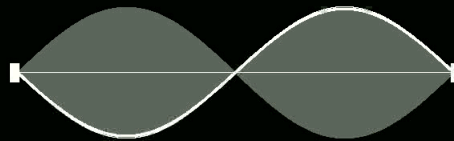
n – liczba węzłów w kierunku radialnym, węzły te są koncentrycznymi sferami wewnątrz gwiazdy

1-wymiarowe oscylacje

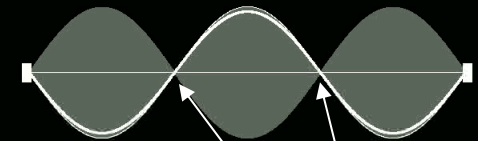
Fundamentalny



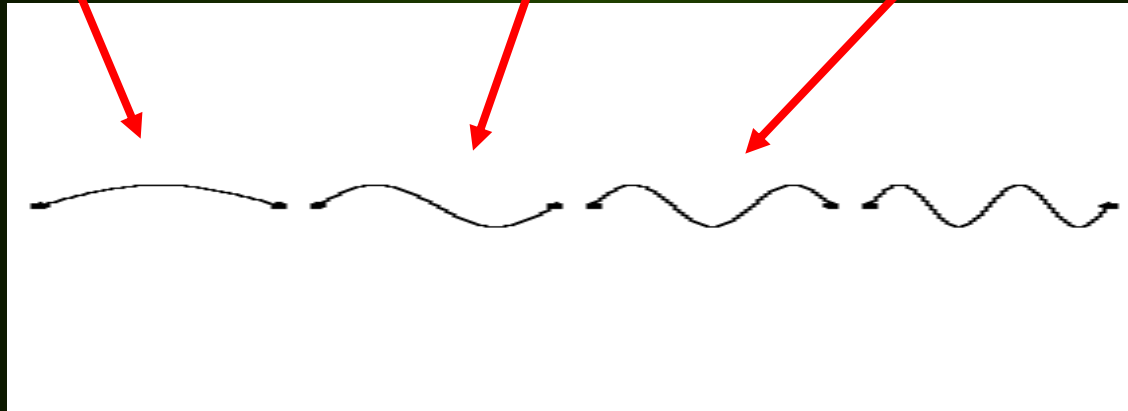
Pierwszy owerton



Drugi owerton

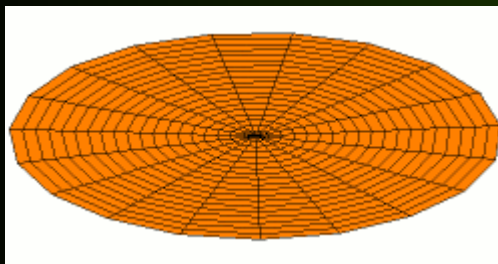


węzły

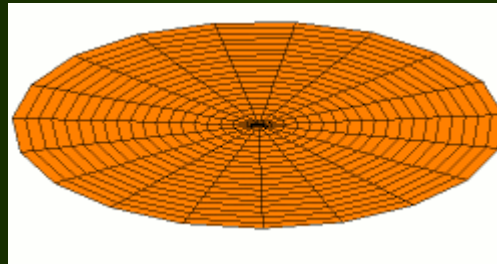


2-wymiarowe oscylacje radialne

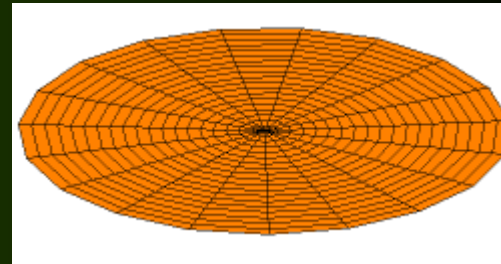
Fundamentalny



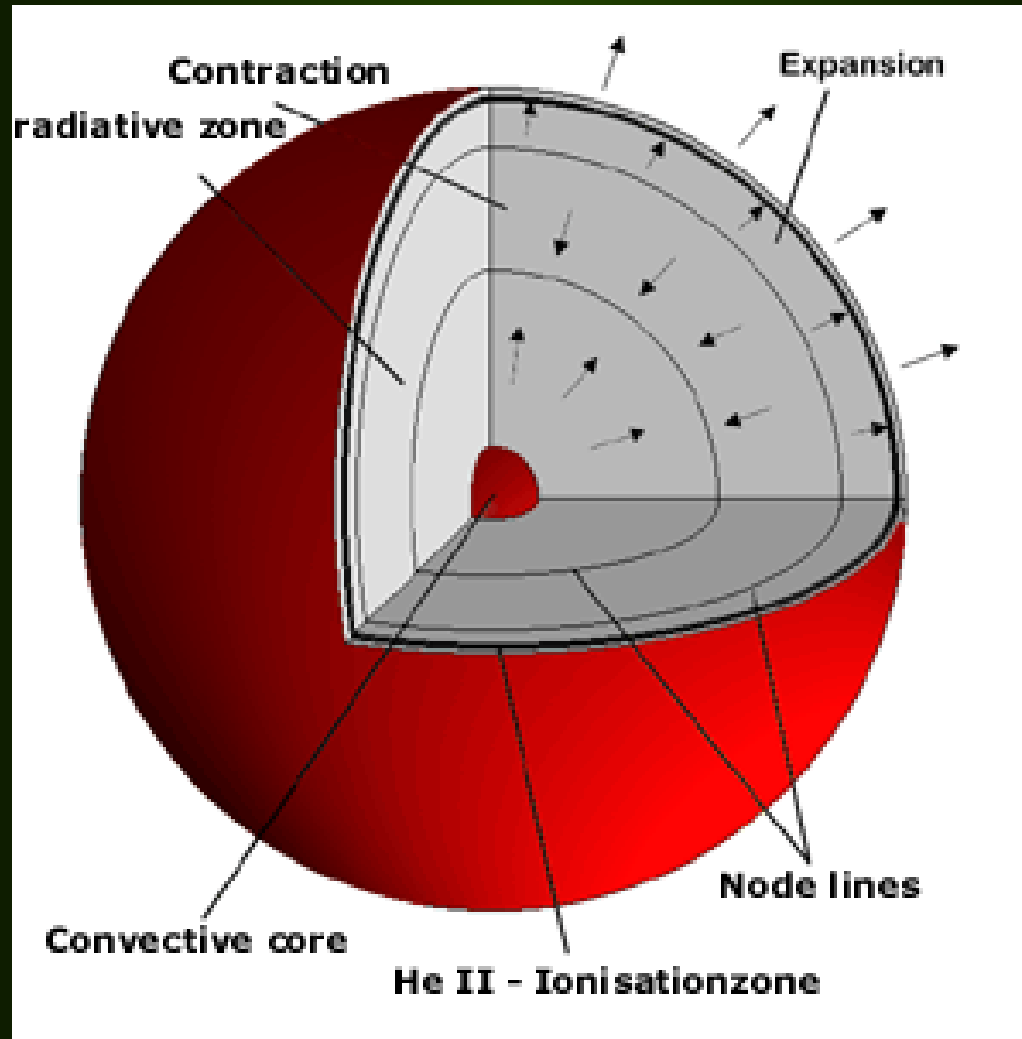
Pierwszy owerton



Drugi owerton

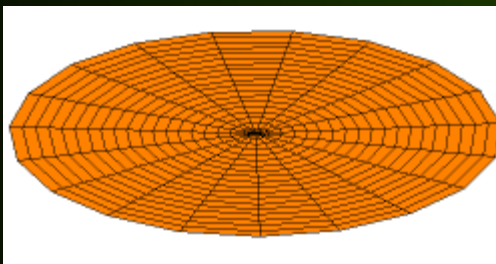
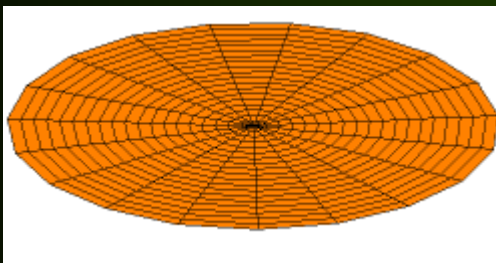
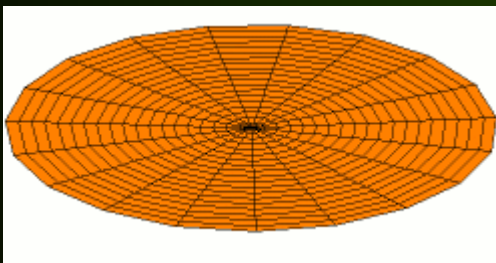


pulsacije radialne z $n=2$

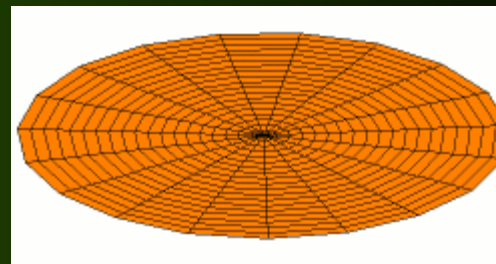
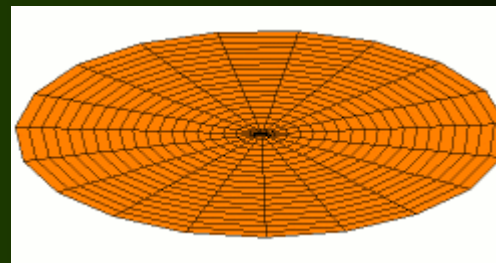
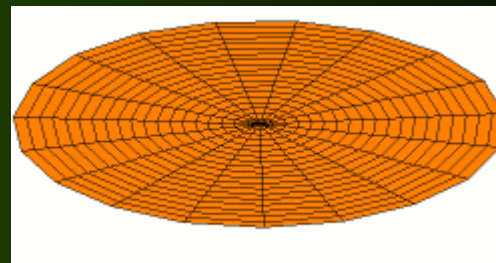


2-wymiarowe oscylacje nieradialne

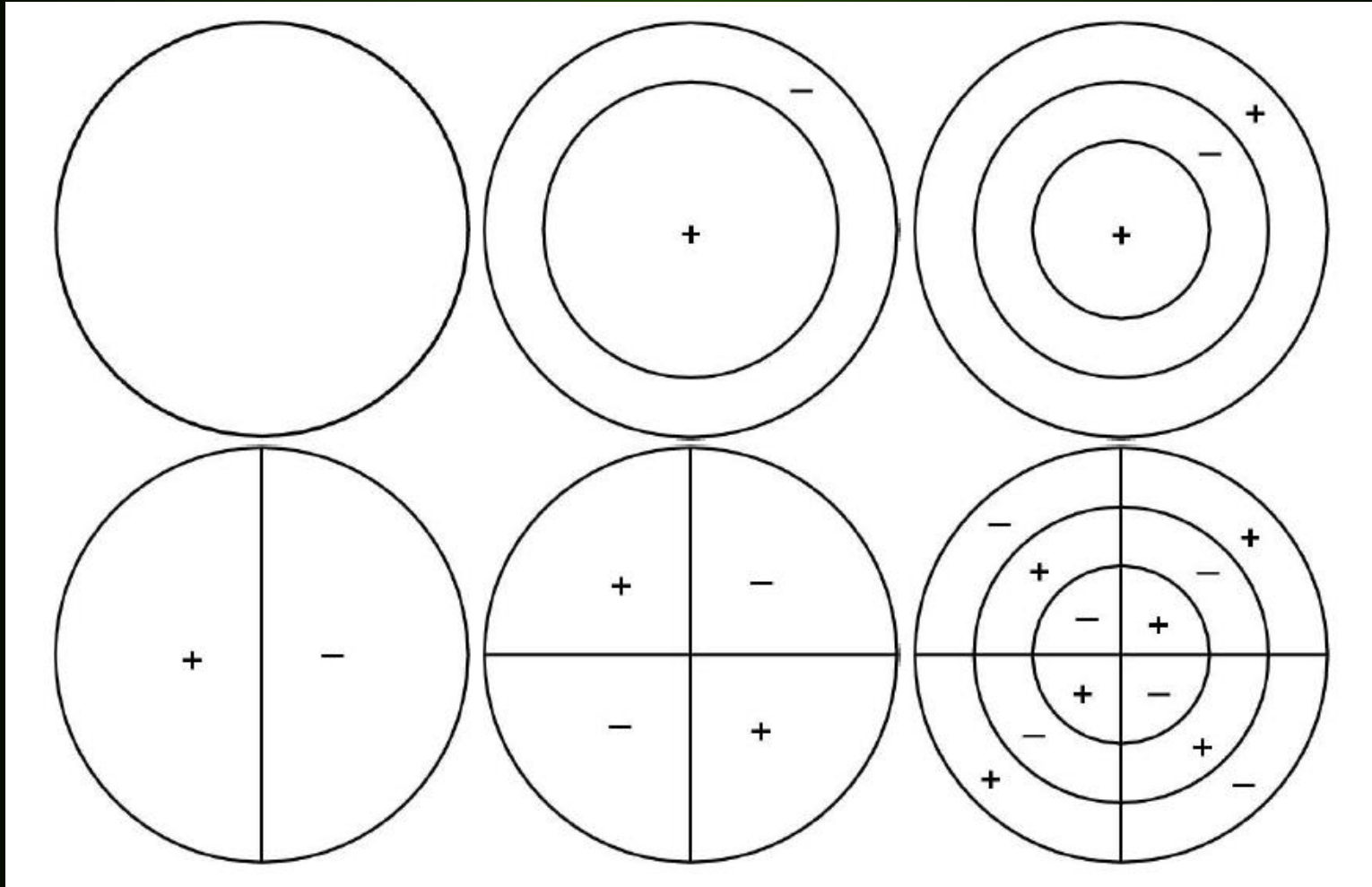
mod dipolowy



mod kwadрупolowy



Radialne i nieradialne oscylacje 2-wymiarowe



w gwiazdzie harmonika $\neq$ owerton

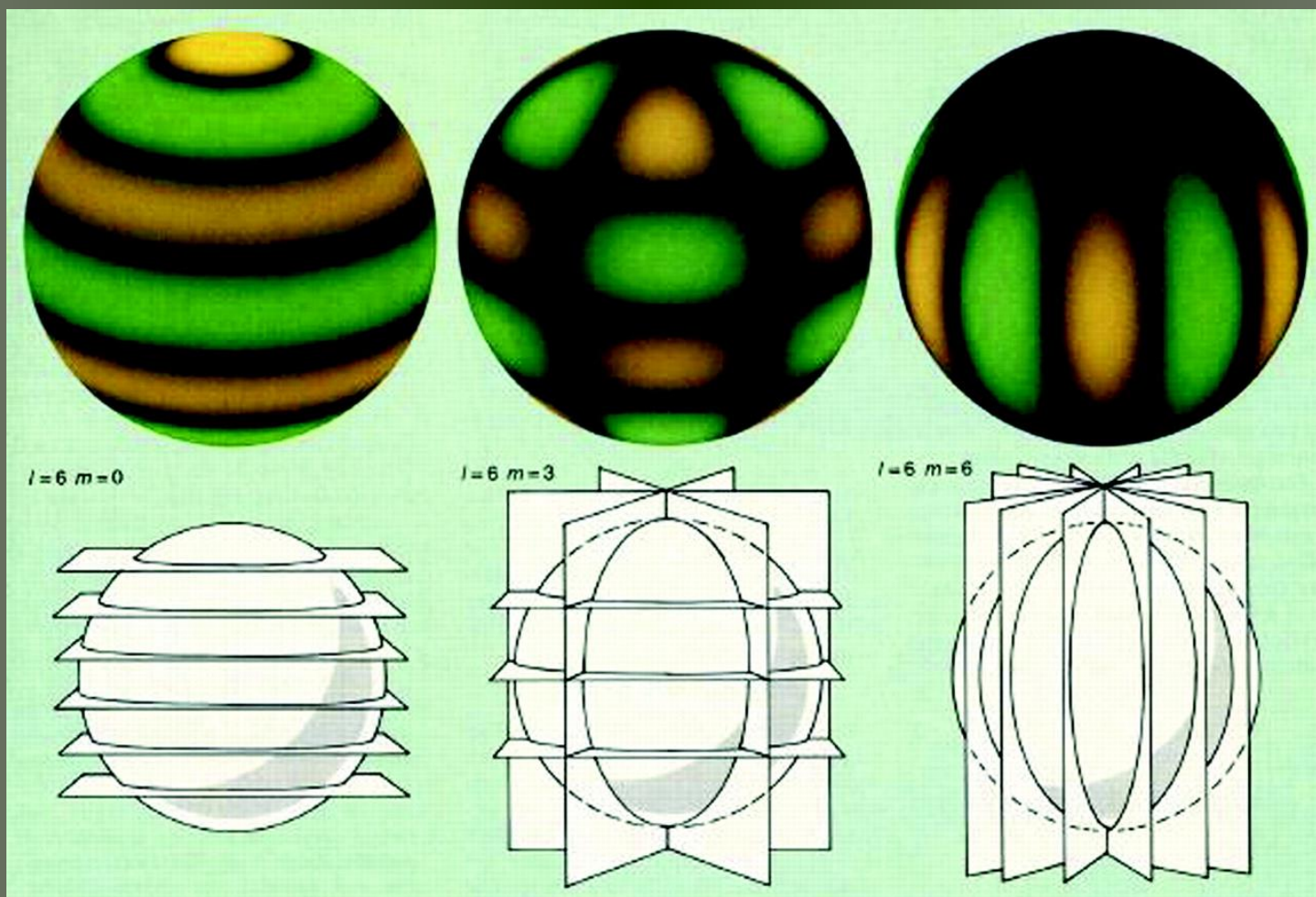
bo $c_s \neq \text{const}$, $c_s \sim T/\mu$

**Cefeidy klasyczne $P_2/P_1=0.71$
gwiazdy typu δ Scuti $P_2/P_1=0.77$**

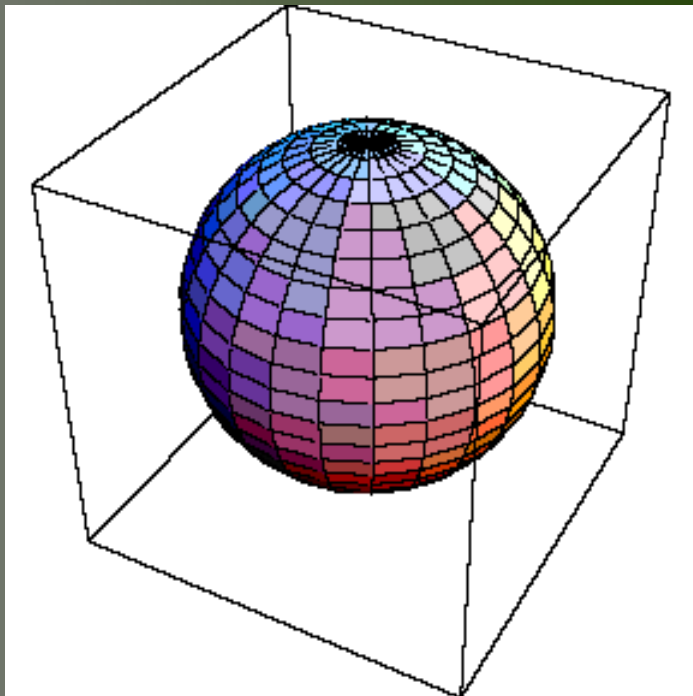
ℓ - całkowita liczba płaszczyzn węzłowych
przecinających powierzchnię gwiazdy

$\ell - |\mathbf{m}|$ - liczba płaszczyzn równoleżnikowych

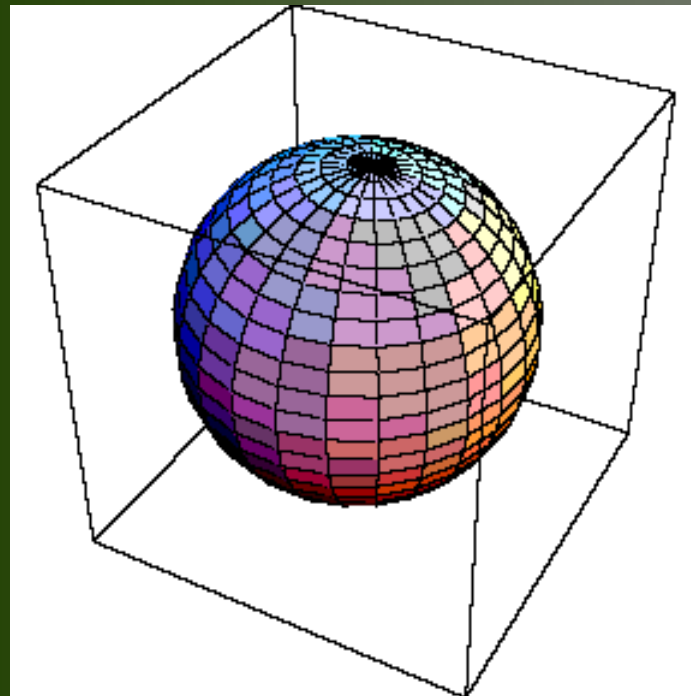
3-wymiarowe oscylacje nieradialne $\ell=6$



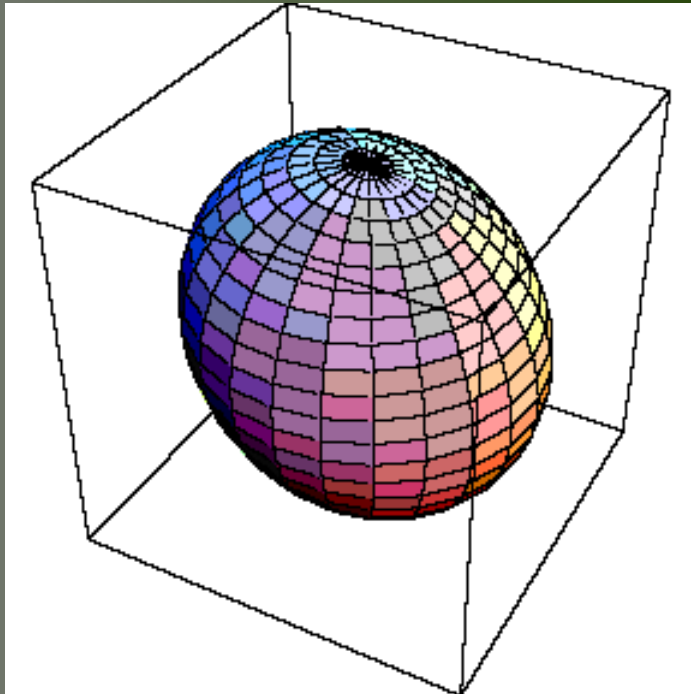
$\ell = 1, m=0$



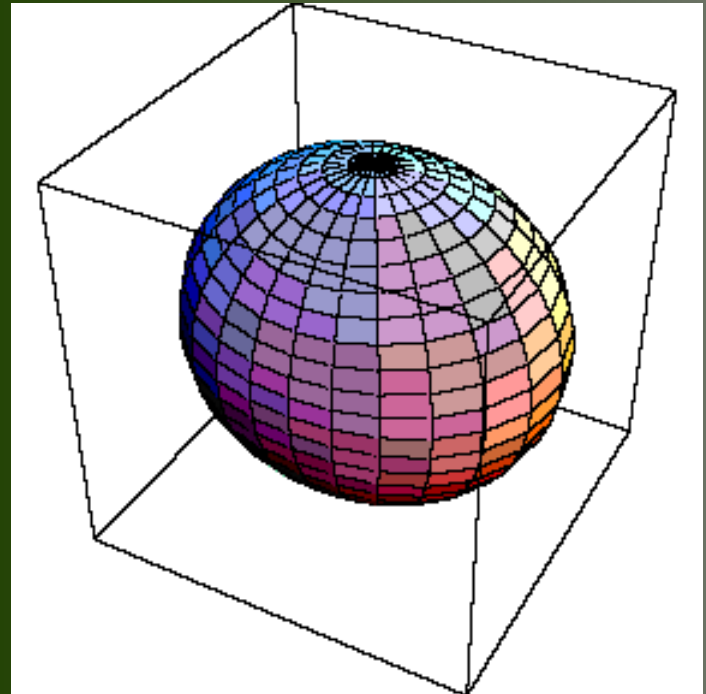
$\ell = 1, m=1$



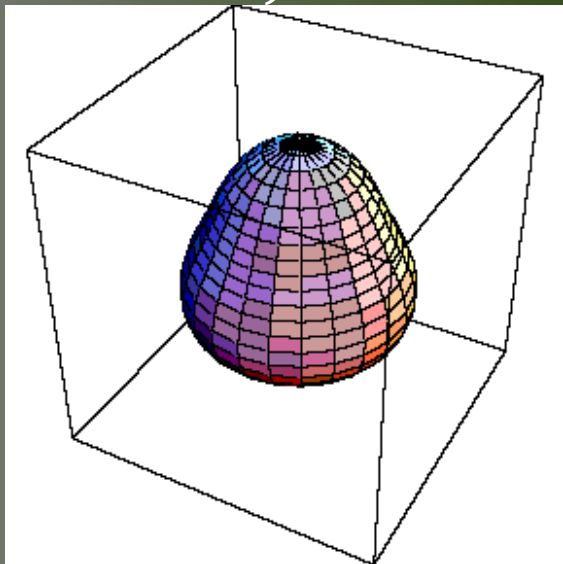
$\ell = 2, m=1$



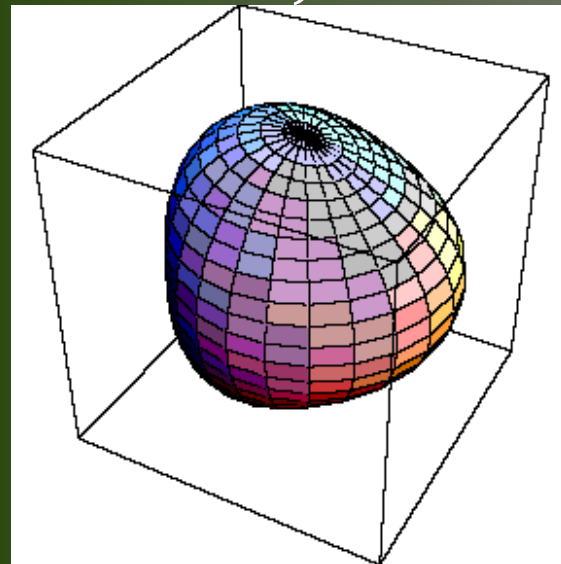
$\ell = 2, m=2$



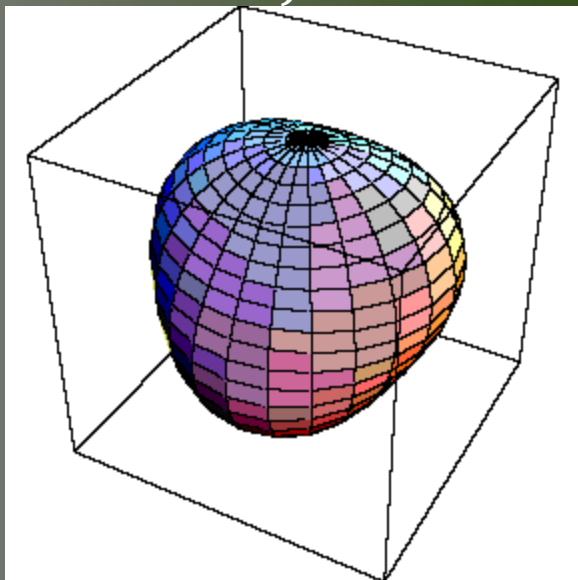
$\ell = 3, m=0$



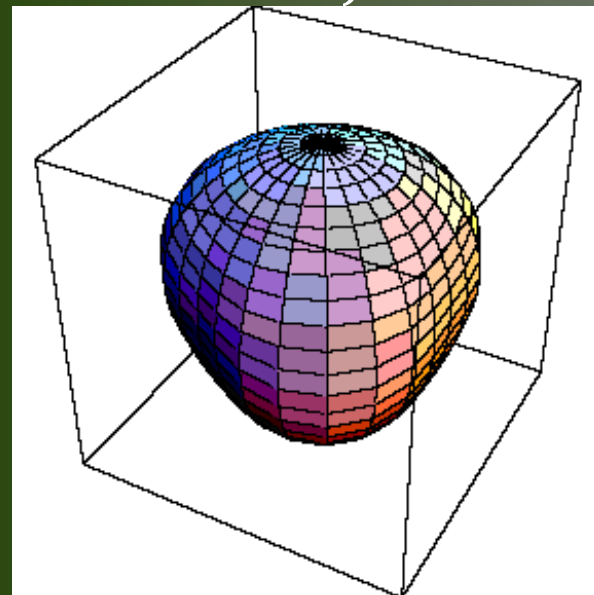
$\ell = 3, m=1$



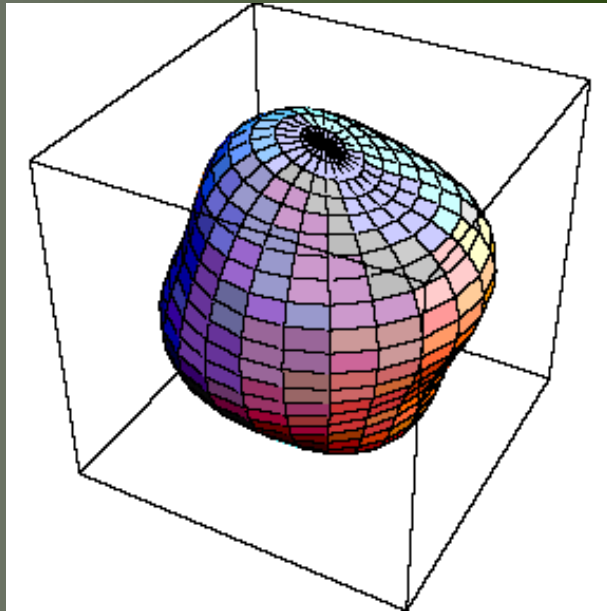
$\ell = 3, m=2$



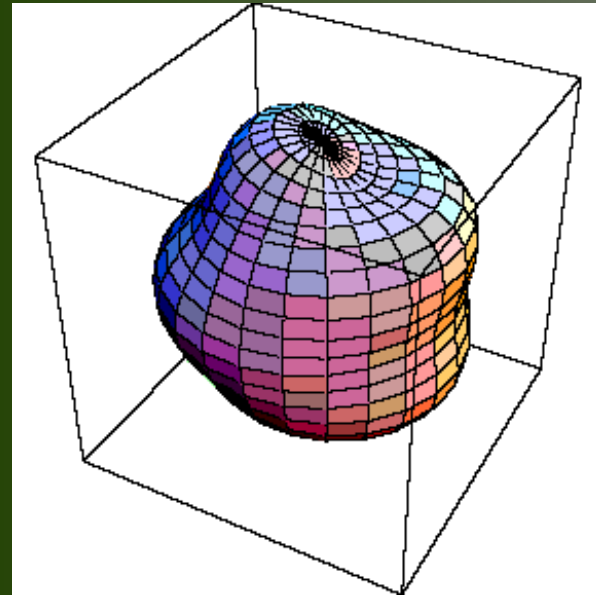
$\ell = 3, m=3$



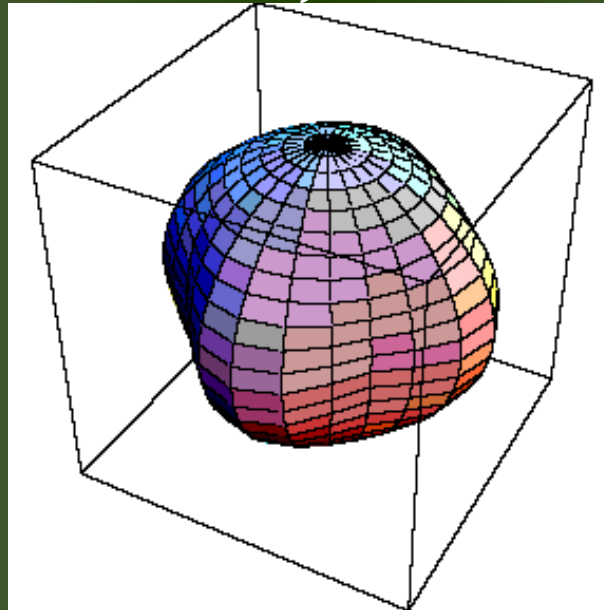
$\ell = 4, m=1$



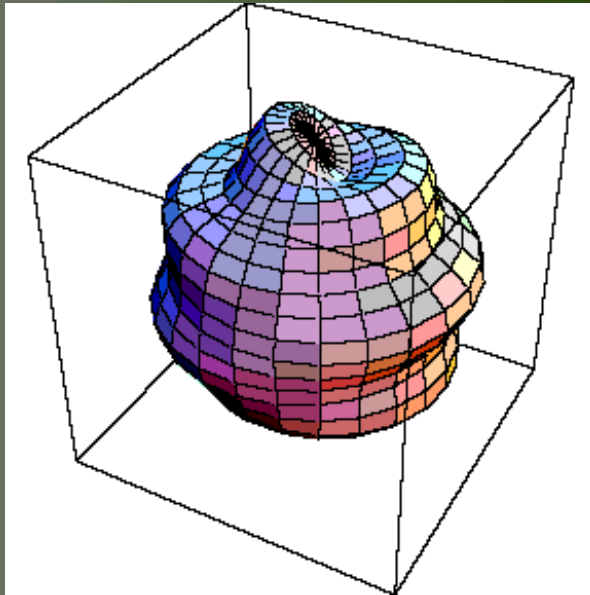
$\ell = 4, m=2$



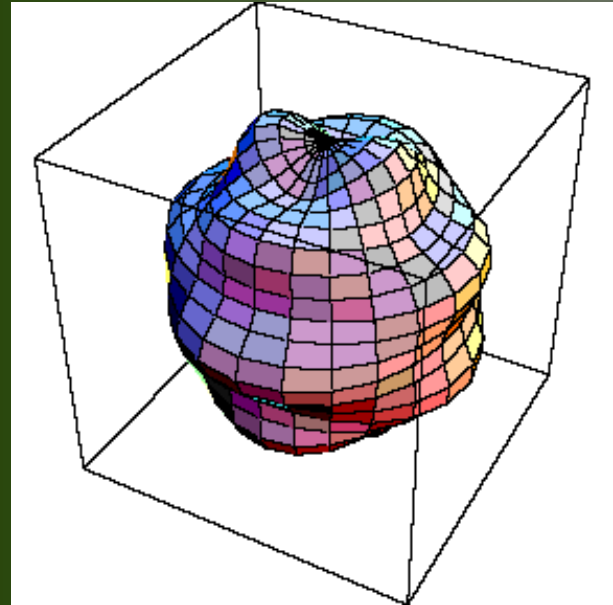
$\ell = 4, m=4$



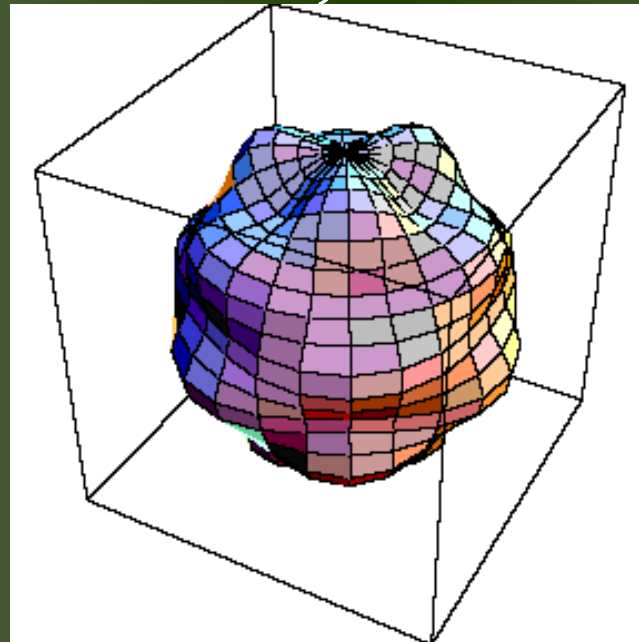
$\ell = 8, m=1$



$\ell = 8, m=2$



$\ell = 8, m=3$



FUNKCJE KULISTE

Zależności kątowe zmian wielkości fizycznych możemy opisać za pomocą funkcji kulistych (harmonik sferycznych):

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = N_{\ell}^m P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Założenia:

- ✱ amplituda pulsacji jest mała
- ✱ gwiazda ma kształt sferycznie-symetryczny

$$\nabla_H^2 Y_\ell^m = -\ell(\ell + 1)Y_\ell^m$$

gdzie ∇_H^2 jest kątową częścią operatora Laplace'a

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ – zupełny zbiór funkcji ortonormalnych zdefiniowanych na sferze

$P_\ell^m(\cos\theta)$ - stowarzyszone funkcje Legendre'a

$$P_\ell^m(z) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-z^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{\ell+|m|}}{dz^{\ell+|m|}} (z^2-1)^\ell, \quad z = \cos \theta$$

N_ℓ^m – czynnik normujący

$$N_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \cdot \frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

dobrany tak, aby dla danego ℓ , harmoniki sferyczne tworzyły bazę ortonormalną

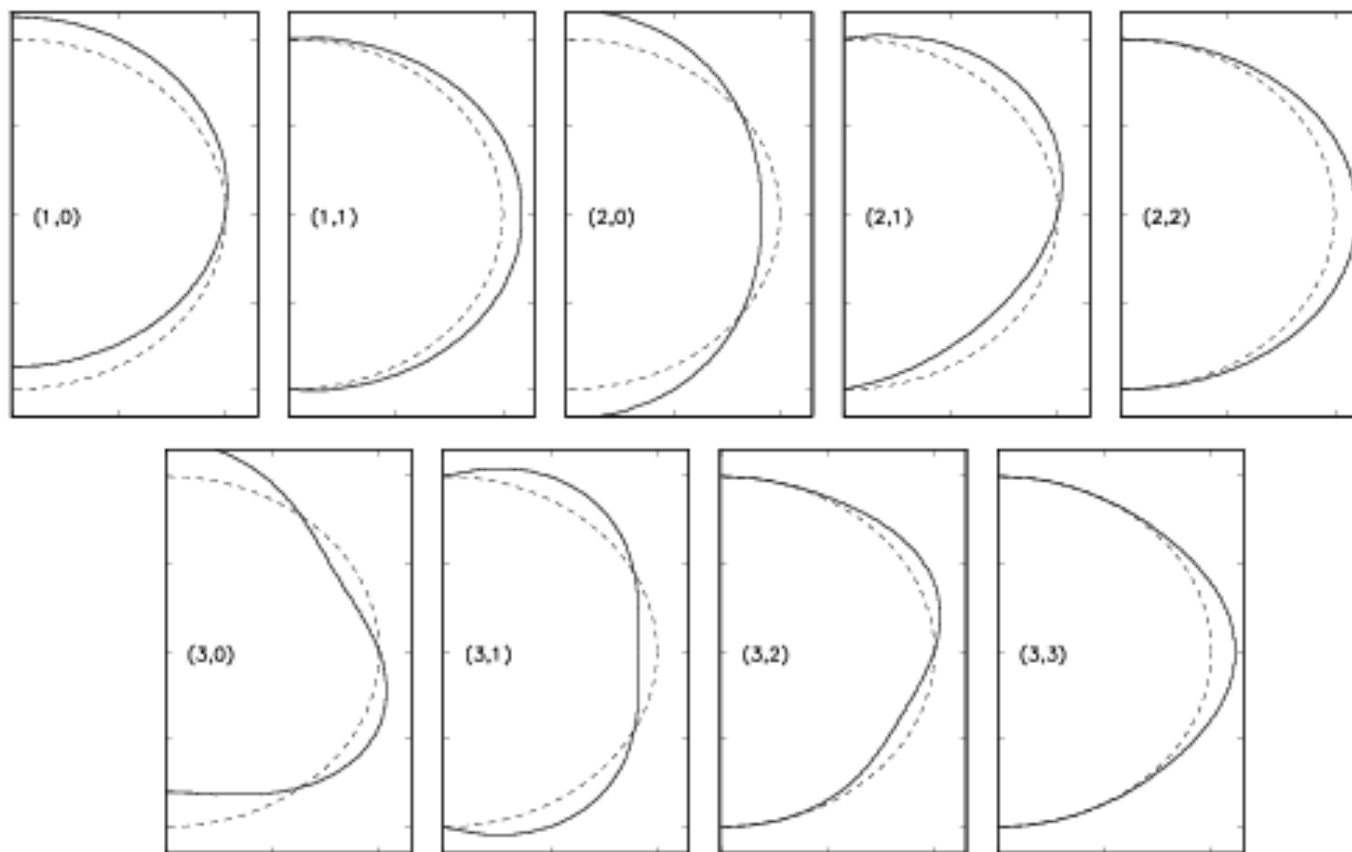
$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_\ell^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

Zaburzenie dowolnego parametru skalarnego,
np. temperatury, dla pojedynczego modu oscylacji,
możemy zapisać w postaci

$$\delta T/T = f_n(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega_{n\ell m} t)$$

$f_n(r)$ –radialna funkcja własna

Harmoniki sferyczne stopni dla $\ell = 1, 2, 3$, $m=0,1,2,3$ przy $\varphi = 0$



W. A. Dziembowski

$\ell=0$ – oscylacje radialne

(szczególny przypadek oscylacji nieradialnych)

$\ell=1$ – dipol

$\ell=2$ – kwadrupol

$n=0$ - mod fundamentalny dla $\ell>1$

$n=1$ - pierwszy overtone

$n=2$ - drugi overtone itd.

dla $\ell=0$ mody są numerowane od $n=1$

$m > 0$ mody współbieżne (prograde), poruszają się zgodnie z rotacją gwiazdy

$m < 0$ mody przeciwbieżne (retrograde)

$m = 0$ mody strefowe (zonal or axisymmetric modes)

$\ell = |m|$ mody sektoralne (sectoral modes)

pozostale przypadki – mody teseralne (tesseral modes)

Mody normalne są opisane przez n i ℓ (degeneracja $2\ell+1$).

Rotacja, pole magnetyczne itp. wprowadzają rozszczepienie.

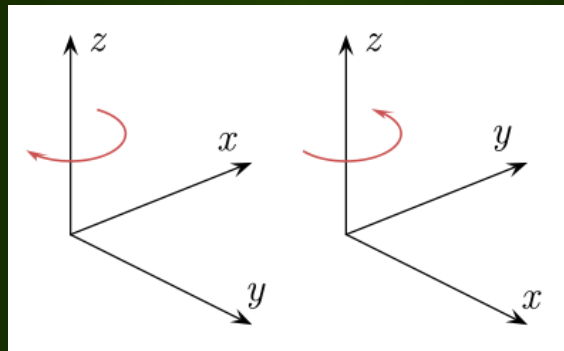
Wpływ rotacji na pulsacje będzie dyskutowany na osobnym wykładzie

PODSTAWOWE UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- ✱ układ współrotujący z gwiazdą
- ✱ układ nieruchomy
- ✱ układ związany z obserwatorem

Układ współrotujący z gwiazdą

Zakładamy, że gwiazda rotuje ze stałą częstością kątową $\Omega \geq 0$ wokół osi $\{\vec{\Omega}\}$. Wprowadzamy rotujący, prawoskrętny, ortogonalny układ współrzędnych kartezjańskich (x'', y'', z'') o początku w środku gwiazdy i osi z'' odpowiadającej $\{\vec{\Omega}\}$. Współrzędne sferyczne $(r'', \theta'', \varphi'')$ mają oś biegunową pokrywającą się z osią z'' .



lewoskrętny prawosk.

Układ nieruchomy

Prawoskrętny, ortogonalny układ o współrzędnych kartezyjskich (x', y', z') i początku w środku gwiazdy, oraz osi z' odpowiadającej z'' . Osie x'' i x' oraz y'' i y' są zgodne w chwili $t_0 = 0$. Współrzędne sferyczne (r', θ', φ') mają taką samą oś biegunową jak w poprzednim układzie.

Układ związany z obserwatorem

Prawoskrętny, inercjalny, ortogonalny układ o współrzędnych kartezyjskich (x, y, z) i początku w środku gwiazdy. Oś z jest skierowana w kierunku do obserwatora, a oś y pokrywa się z y' . Oznacza to, że osie z, z', x, x' leżą w tej samej płaszczyźnie.

Kąt i między osiami z i z' nazywamy kątem inklinacji gwiazdy i mierzymy dodatnio od z do z' ; $i \in [0^\circ, 180^\circ]$.

Współrzędne sferyczne (r, θ, φ) mają oś biegunową pokrywającą się z kierunkiem do obserwatora.

TRANSFORMACJE MIĘDZY UKŁADAMI

Związek pomiędzy układem współrotującym z gwiazdą a układem nieruchomym możemy dla współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned}r'' &= r' \\ \theta'' &= \theta' \\ \varphi'' &= \varphi' - \Omega t\end{aligned}$$

Przejście między układami (r', θ', φ') i (r, θ, φ) jest bardziej złożone.

Położenie dwóch układów ortokartezjańskich względem siebie, o wspólnym początku, tej samej skali i orientacji, jest określone przez dziewięć kątów

$$\alpha_1 = \angle(Ox', Ox) \quad \beta_1 = \angle(Ox', Oy) \quad \gamma_1 = \angle(Ox', Oz)$$

$$\alpha_2 = \angle(Oy', Ox) \quad \beta_2 = \angle(Oy', Oy) \quad \gamma_2 = \angle(Oy', Oz)$$

$$\alpha_3 = \angle(Oz', Ox) \quad \beta_3 = \angle(Oz', Oy) \quad \gamma_3 = \angle(Oz', Oz)$$

Które pozwalają na wyrażenie jednych współrzędnych (x,y,z) przez drugie (x',y',z')

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1,$$

$$y' = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2,$$

$$z' = x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3,$$

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3,$$

$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3,$$

$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3.$$

Ponieważ zachodzą następujące relacje:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1$$

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1$$

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = 0$$

$$\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 = 0$$

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 = 0$$

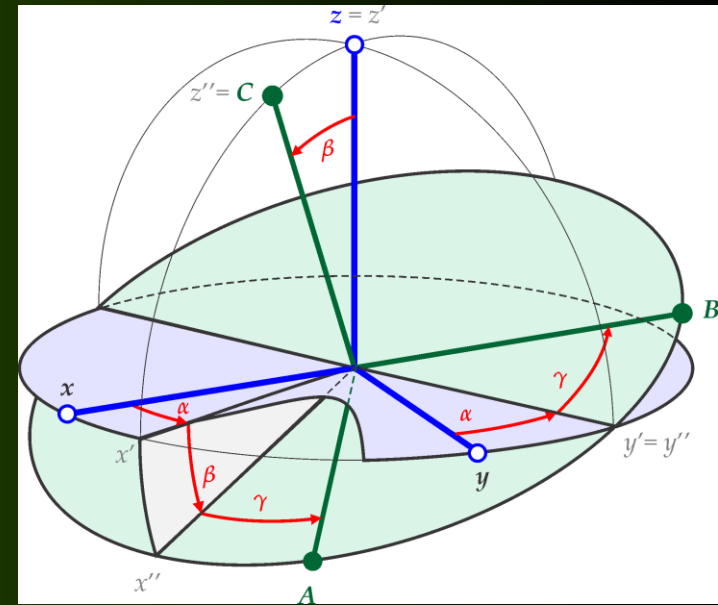
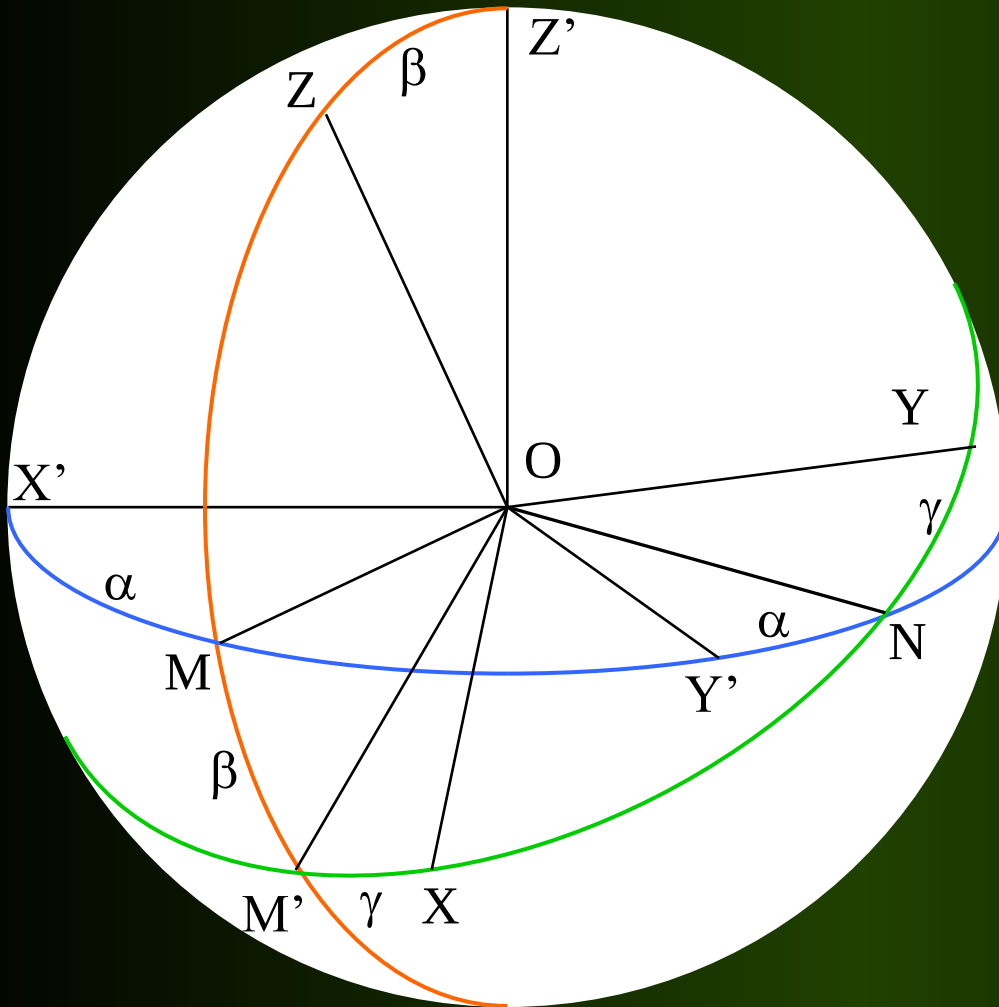
Tylko trzy kąty są niezależne, są to **kąty Eulera (α, β, γ) .**

$$\alpha = \angle(\text{Oy}, \text{ON}) \quad \beta = \angle(\text{Oz}, \text{Oz}') \quad \gamma = \angle(\text{ON}, \text{Oy}'),$$

ON - krawędź przecięcia się płaszczyzn $x\text{Oy}$ i $x'\text{Oy}'$

Kąty Eulera

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi$$



Zapisy macierzowe opisujące kolejne obroty mają postać

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Współczynniki przekształcenia (Smirnow, 1962)

$$a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

Możemy więc napisać

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} x_k$$

i odwrotnie

$$x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} x'_k$$

W przypadku układu związanego z obserwatorem oś y pokrywa się z y' , a osie z, z', x, x' leżą w tej samej płaszczyźnie. Czyli:

$$\alpha=\gamma=0, \beta=i$$

Macierz transformacji między układami (r', θ', ϕ') i (r, θ, ϕ)

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial \theta'} & \frac{\partial r}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r'} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos i - \sin i \cos \phi \cot \theta}{N(\theta, \phi)} & -\sin \phi \sin i \\ 0 & \frac{\sin \phi \sin i}{\sin^2 \theta N(\theta, \phi)} & \cos i - \cos \phi \sin i \cot \theta \end{pmatrix}$$

gdzie

$$N(\theta, \phi) = \sqrt{\sin^2 \phi + (\cos i \cos \phi - \sin i \cot \theta)^2}$$

Element powierzchni i jego normalna

Wektor elementu powierzchni, $d\vec{S}$, możemy rozłożyć na składowe

$$d\vec{S} = \vec{n}dS = (\vec{i}dS_x, \vec{j}dS_y, \vec{k}dS_z)$$

które wyrażają się poprzez jakobiany

$$dS_x = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} d\theta d\phi,$$

$$dS_y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} d\theta d\phi,$$

$$dS_z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} d\theta d\phi.$$

Wektor $\vec{n}$ jest normalną do powierzchni $d\vec{S}$ (Korn & Korn 1961)

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi}{|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi|} = \\ &= \frac{\vec{i} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} + \vec{j} \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} + \vec{k} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)}}{\left[\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 \right]^{1/2}},\end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta},$$

$$\vec{r}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}.$$

Pole elementu powierzchni liczymy według formuły

$$\begin{aligned} dS &= |d\vec{S}| = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| d\theta d\phi \\ &= \left[\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 \right]^{1/2} d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Dla gwiazdy sferycznie symetrycznej element ten wynosi

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

a jego poszczególne składowe

$$dS_x = R^2 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$dS_y = R^2 \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$dS_z = R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi,$$

gdzie R oznacza promień gwiazdy.

Składowe elementu masy

Jeżeli gwiazda pulsuje nieradialnie to zmieniają się wszystkie składowe elementu masy, czyli

$$r \rightarrow R + \delta r(R, \theta, \phi),$$

$$\theta \rightarrow \theta + \delta \theta(R, \theta, \phi),$$

$$\phi \rightarrow \phi + \delta \phi(R, \theta, \phi).$$

Zakładając, że $\delta r, \delta \theta, \delta \phi$ są małymi zaburzeniami, możemy zlinearyzować równania

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Jako wynik otrzymamy

$$x_p = R(\sin \theta \cos \phi - \delta \phi \sin \theta \sin \phi + \delta \theta \cos \theta \cos \phi) + \delta r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y_p = R(\sin \theta \sin \phi + \delta \phi \sin \theta \cos \phi + \delta \theta \cos \theta \sin \phi) + \delta r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z_p = R(\cos \theta - \delta \theta \sin \theta) + \delta r \cos \theta.$$

Składowe elementu powierzchni gwiazdy pulsującej

Składowe pola elementu powierzchni gwiazdy pulsującej nieradialnie

$$dS_x = \left[R \sin \theta \cos \phi (R \sin \theta + 2 \sin \theta \delta r - \cos \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \delta \theta \right.$$

$$\left. - R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \delta \phi + R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) + R \sin \phi \frac{\partial \delta r}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi,$$

$$dS_y = \left[R \sin \theta \sin \phi (R \sin \theta + 2 \sin \theta \delta r - \cos \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \delta \theta \right.$$

$$\left. + R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \delta \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) - R \cos \phi \frac{\partial \delta r}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi,$$

$$dS_z = \left[R \sin \theta (R \cos \theta + 2 \cos \theta \delta r + \sin \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta \theta \right.$$

$$\left. + R^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) \right] d\theta d\phi.$$

Pole elementu powierzchni w przypadku małych zaburzeń

$$dS = R^2 \sin \theta \left[1 + 2 \frac{\delta r}{R} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \delta \theta + \frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi.$$

Funkcje kuliste w różnych układach odniesienia

$$Y_\ell^m(\theta', \phi') = O_{R(\alpha, \beta, \gamma)} Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_\ell^k(\theta, \phi)$$

$$d_{\ell m k}(i) = \sum_r (-1)^{k-m-r} \frac{[(\ell+m)! (\ell-m)! (\ell+k)! (\ell-k)!]^{1/2}}{r! (\ell+m-r)! (\ell-k-r)! (k-m+r)!} \cdot \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{2\ell+m-k-2r} \left(\sin \frac{i}{2}\right)^{k-m+2r}$$

$$r \geq 0, r \geq m-k, r \leq \ell-k, r \leq \ell+m$$

Hamermesh 1968

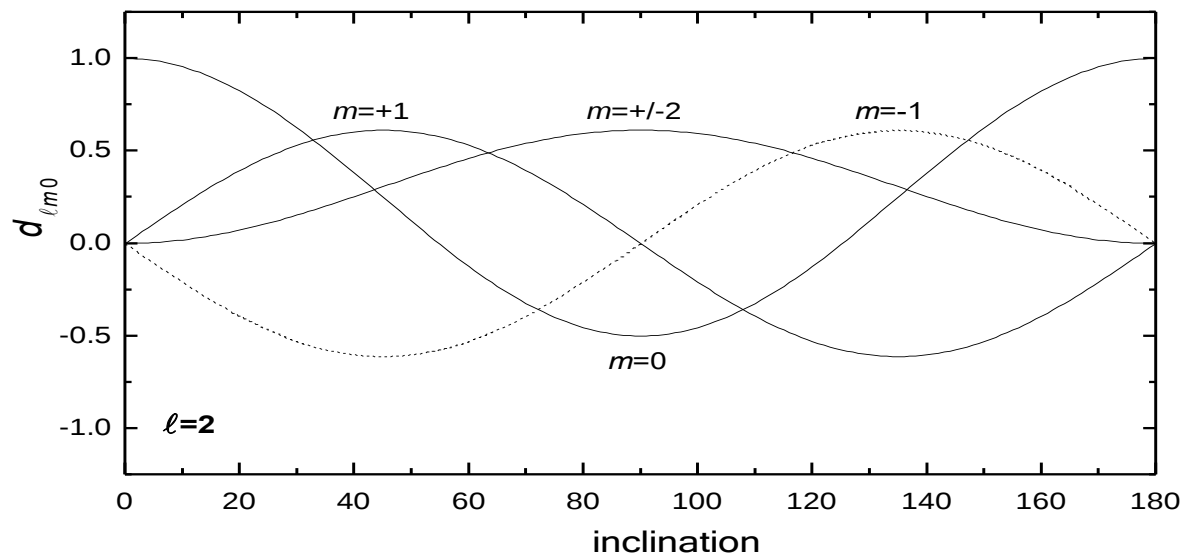
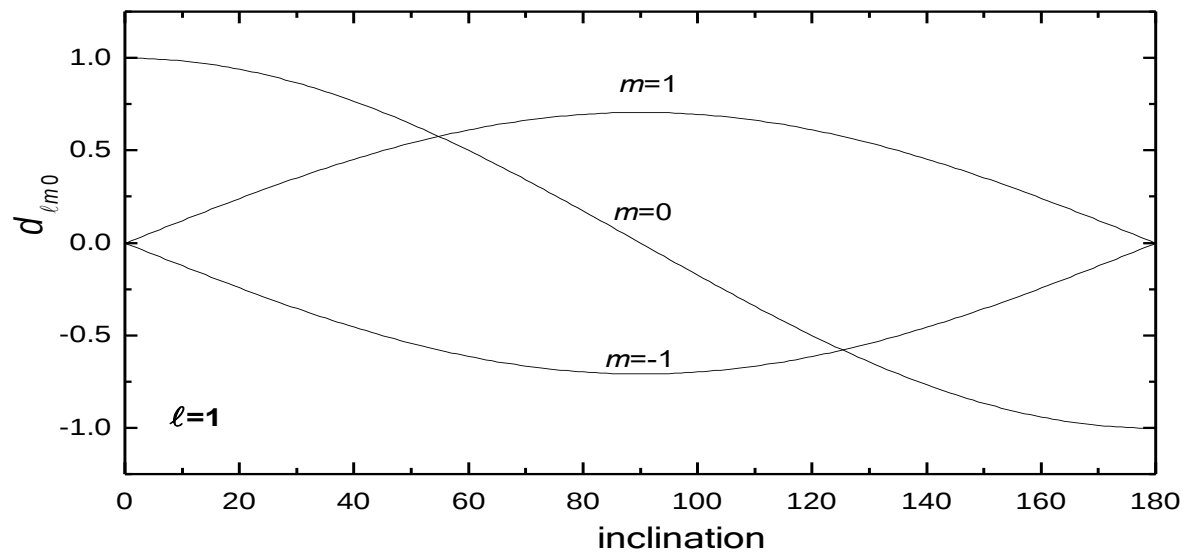
O_R –operator związany z grupą obrotów o kąty Eulera (α, β, γ).

W naszym przypadku: $\alpha=\gamma=0$ $\beta=i$.

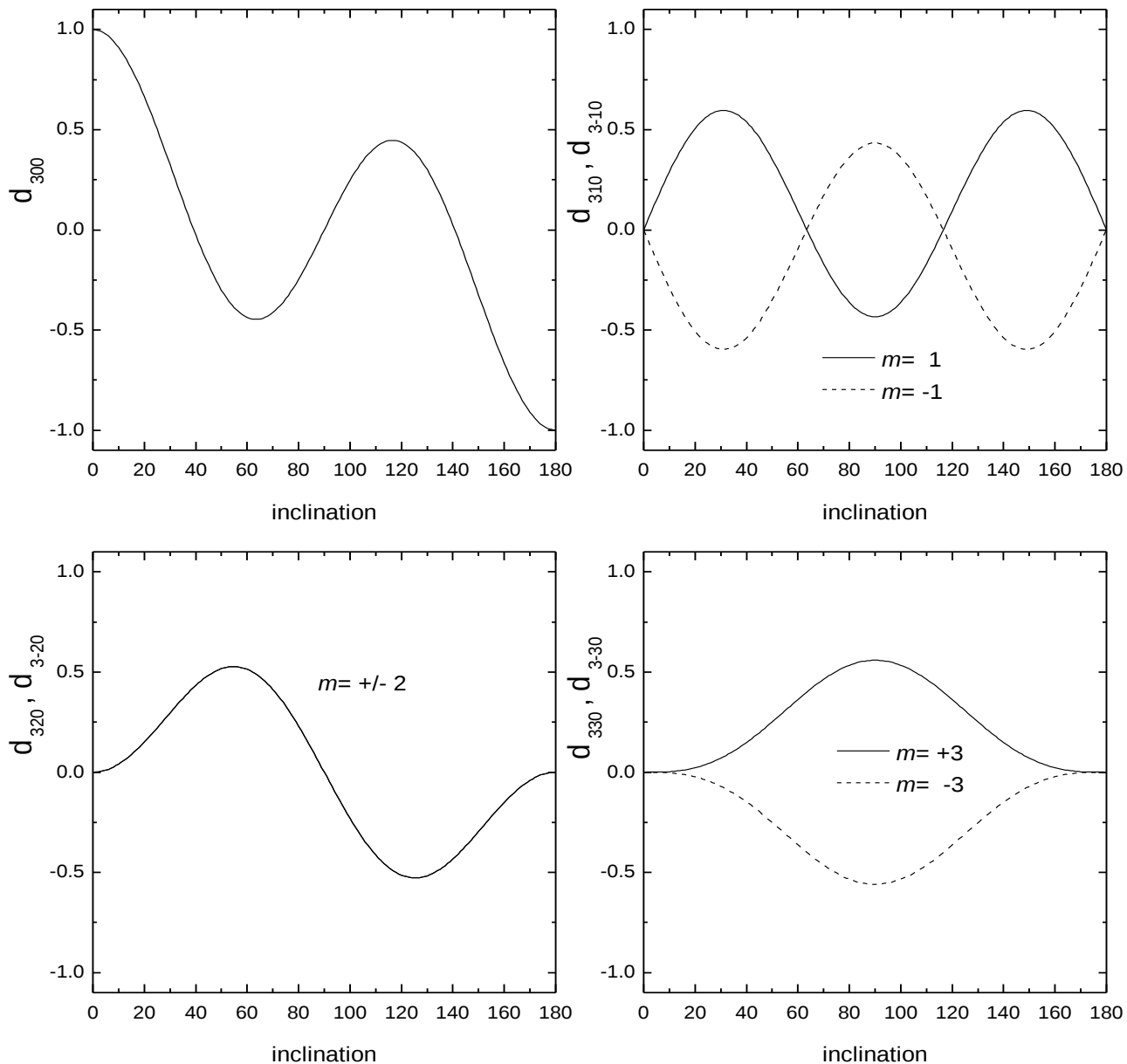
$d_{\ell m k}$ – reprezentacje grupy obrotów

$d_{\ell m 0}$ – funkcjami Wignera ($k=0$).

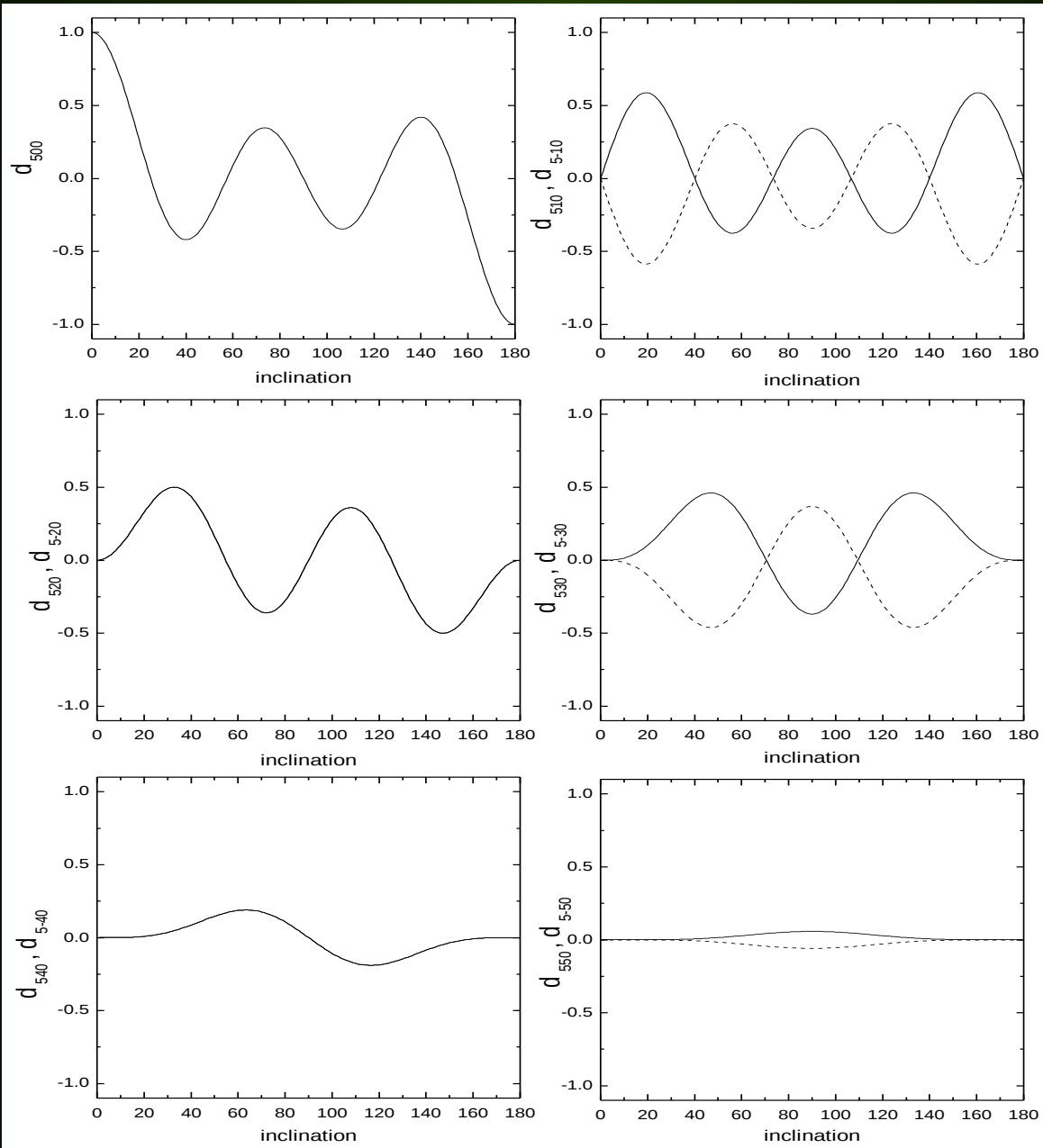
Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=1,2$



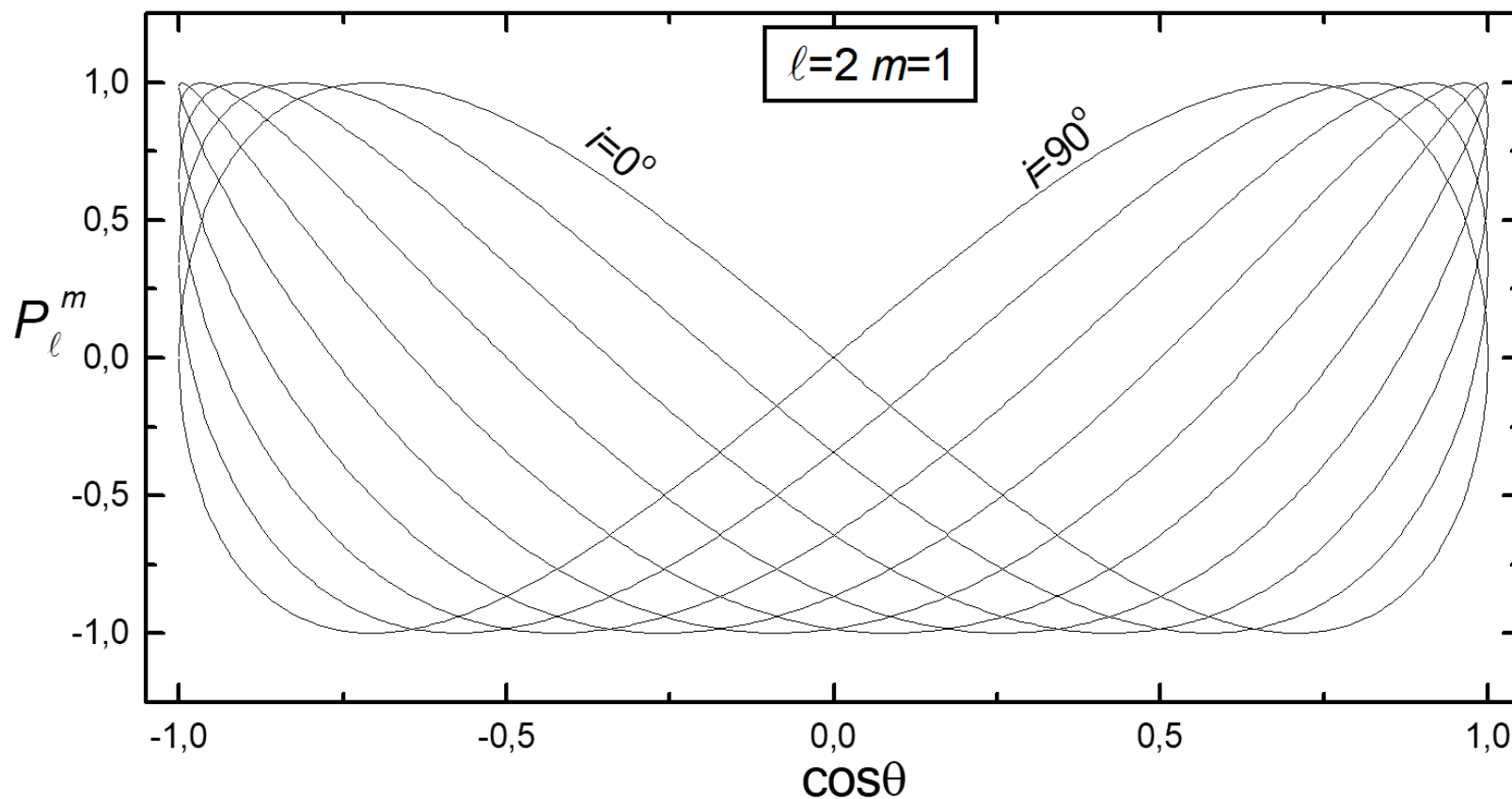
Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=3$



Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=5$



Funkcje Legendre'a, $P_\ell^m(\cos\theta)$, dla $\ell=2$, $m=1$



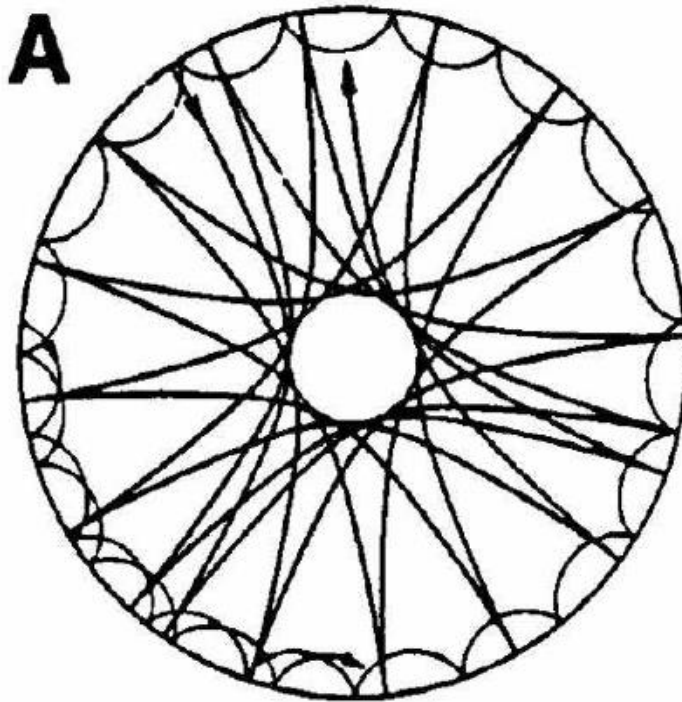
Mody nieradialne dzielimy na dwie grupy (Cowlinga):

mody p (akustyczne) – siłą reakcji jest ciśnienie

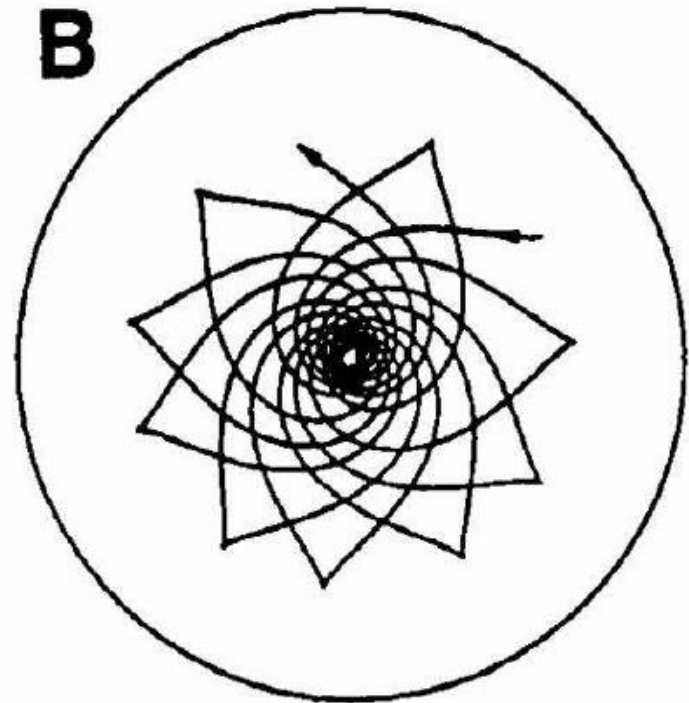
mody g (grawitacyjne) – siłą reakcji jest siła wyporu

Obszary pułapkowania dla Słońca

mody p
 $\ell=2, 100, n=8$

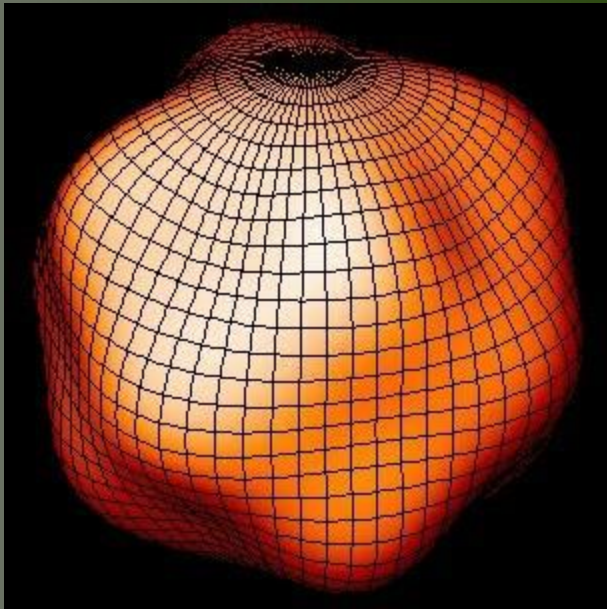


mod g
 $\ell=5, n=10$

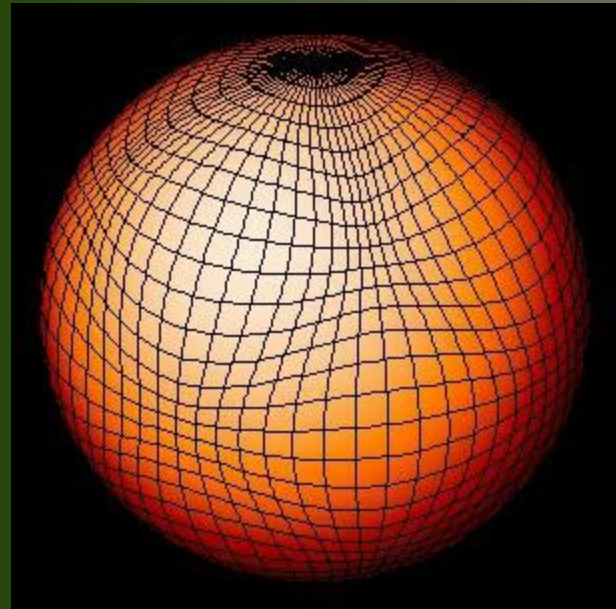


$$\ell=6, m=+4$$

mod p



mod g



Lokalne własności oscylacji są opisane przez dwie charakterystyczne częstotliwości:

1. **Lamba, L_ℓ^2**
2. **Brunta-Väisälä, N^2**

Częstotliwość **Lamba (akustyczna)**, L_ℓ^2

$$L_\ell^2 = (k_h c)^2 = \ell(\ell+1) c^2 / r^2$$

$$k_h = 2\pi/\lambda_h, \quad c^2 = \Gamma_1 p / \rho, \quad \Gamma_1 = (d \ln p / d \ln \rho)_{\text{ad}}$$

k_h - falowa liczba horyzontalna, Γ_1 - wykładnik adiabaty
 λ_h – horyzontalna długość fali

$$k_h = [\ell(\ell+1)]^{1/2} / r \approx \ell / r \quad - \quad \text{dla wysokich stopni } \ell$$

Fala akustyczna pokonuje drogę $\lambda_h \approx 2\pi r / \ell$ ruchem horyzontalnym z okresem $2\pi / L_\ell$

Częstotliwość **Brunta-Väisälä**, N^2

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right)$$

N^2 – częstotliwość z jaką element gazu może oscylować wokół położenia równowagi po wpływie siły grawitacji

$$\omega^2 > L_\ell^2, N^2$$

mody o wysokich częstotliwościach (ciśnieniowe)

$$\omega^2 < L_\ell^2, N^2$$

mody o niskich częstotliwościach (grawitacyjne)

$$L_\ell^2 > \omega^2 > N^2 \text{ lub } L_\ell^2 < \omega^2 < N^2$$

obszary znoszenia oscylacji

Diagram propagacji dla politropy $n=3$

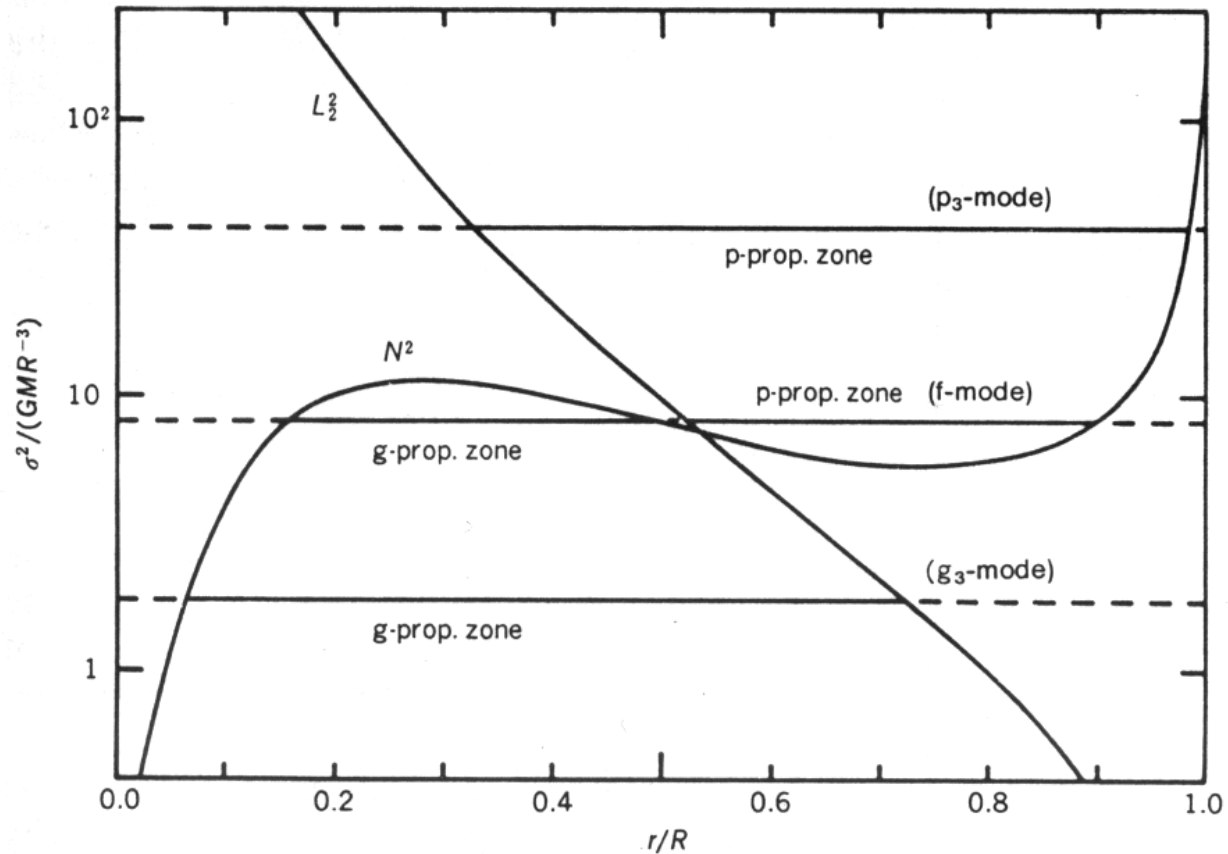


Fig. 4.2 Variations of N^2 and L_2^2 (normalized by GM/R^3) with respect to r/R for a polytrope (with the polytropic index 3) model. Three horizontal lines show the wave propagation zones (thin full lines) for the p_3 -mode, the f-mode, and g_3 -mode of spherical harmonic degree $l = 2$.

**Obszary pułapkowania dla modu g ($100 \mu\text{Hz}$)
i modu p ($2000 \mu\text{Hz}$) o $\ell=20$ dla modelu Słońca**

