

**Pulsacje Gwiazdowe**  
**II rok Astronomii (Studia II-go stopnia)**  
**Rok akademicki 2019/2020**  
**Lista nr 1**

1. Przedstawić graficznie mody o stopniu,  $\ell$ , i rzędzi azymutalnym,  $m$ :

$$(\ell, m) = (2, 1), (3, 2), (5, 3), (6, 1), (7, 7), (8, 0).$$

2. Pokazać, że

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \overline{Y_\ell^m(\theta, \varphi)}$$

3. Pokazać, że dla danego  $\ell$  harmoniki sferyczne tworzą bazę ortonormalną.

4. Pokazać, że harmoniki sferyczne spełniają następujące relacje rekurencyjne:

$$\sin \theta \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} = \ell J_{\ell+1}^m Y_{\ell+1}^m - (\ell + 1) J_\ell^m Y_{\ell-1}^m,$$

$$\cos \theta Y_\ell^m = J_{\ell+1}^m Y_{\ell+1}^m + J_\ell^m Y_{\ell-1}^m,$$

gdzie  $J_\ell^m = \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}$  jeśli  $|m| < \ell$  i  $J_\ell^m = 0$  jeśli  $|m| \geq \ell$ .

5. Pokazać, że

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

6. \* Wyprowadzić macierz transformacji,  $D$ , między układem związanym z gwiazdą a układem związanym z obserwatorem.
7. Wyprowadzić wyrażenia na składowe elementu masy gwiazdy pulsującej nieradialnie  $(x_p, y_p, z_p)$ .
8. Wyprowadzić wyrażenia na składowe pola powierzchni gwiazdy pulsującej nieradialnie  $(dS_x, dS_y, dS_z)$  oraz na pole elementu powierzchni  $dS$ .
9. Napisać program, który liczy funkcje Wignera  $d_{\ell m 0}$ .
10. Napisać program, który liczy  $P_\ell^m$  dla różnych kątów inklinacji,  $i$ .
11. Pokazać, że w dynamicznie stabilnej warstwie przesunięty element będzie przywracany do położenia równowagi z częstotliwością Brunta–Väisälä  $N^2$  (literatura np. Kippenhah, Weigert & Weiss, *Stellar structure and Evolution*).

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz