

LITERATURA

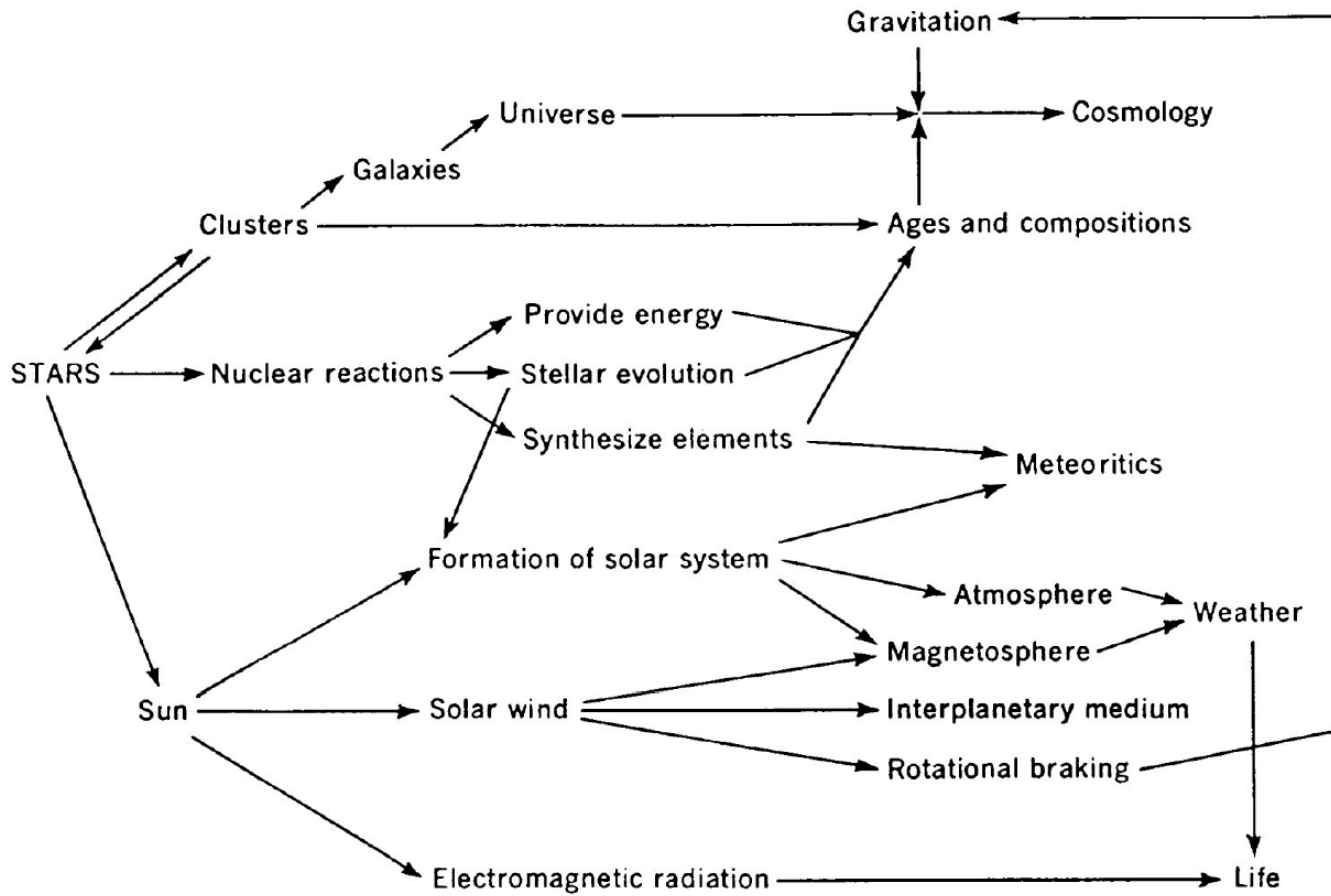
1) Joergen Christensen-Dalsgaard, *Stellar Structure and Evolution*
http://astro.phys.au.dk/~jcd/evolnotes/LN_stellar_structure.pdf

2) R. Kippenhahn, A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*

3) O. Pols, *Stellar Structure and Evolution*
https://astro.uni-bonn.de/~nlangner/siu_web/teach_sse.html

4) B. Paczyński, Budowa i Ewolucja Gwiazd

5) W. Dziembowski, Budowa i Ewolucja Gwiazd



GWIAZDA

Ciało niebieskie zbudowane z gazu (plazmy), spełniające dwa warunki:

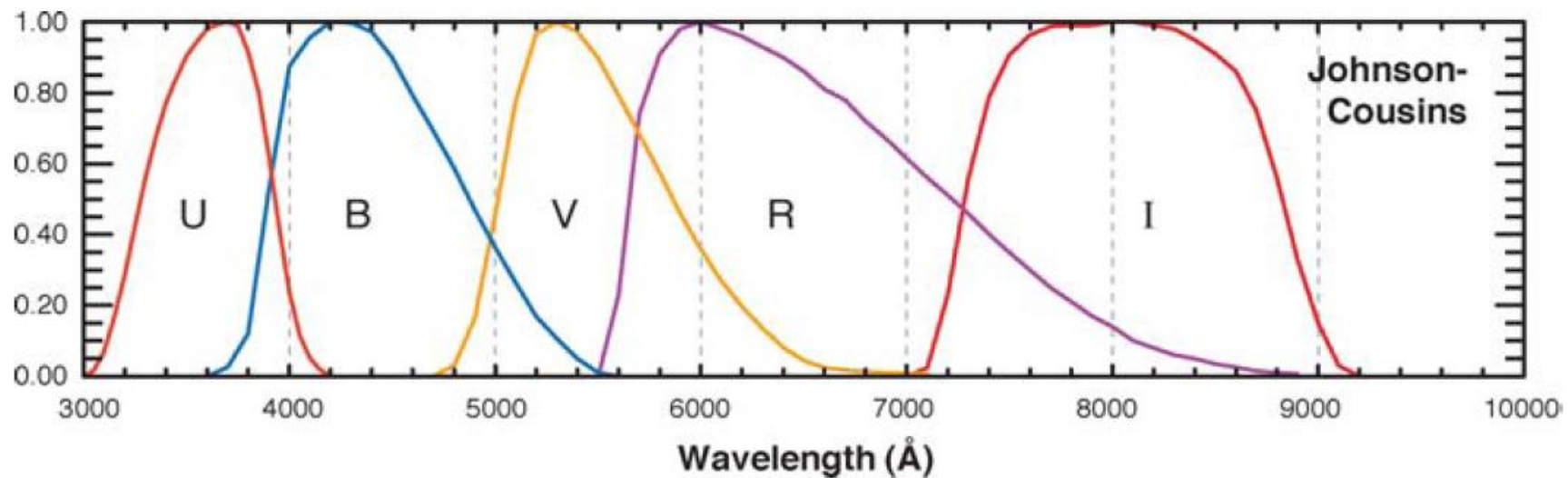
1) jest związane samograwitacją

2) wyświeca energię, która jest dostarczana ze źródeł wewnętrznych

Dlaczego Słońce świeci?

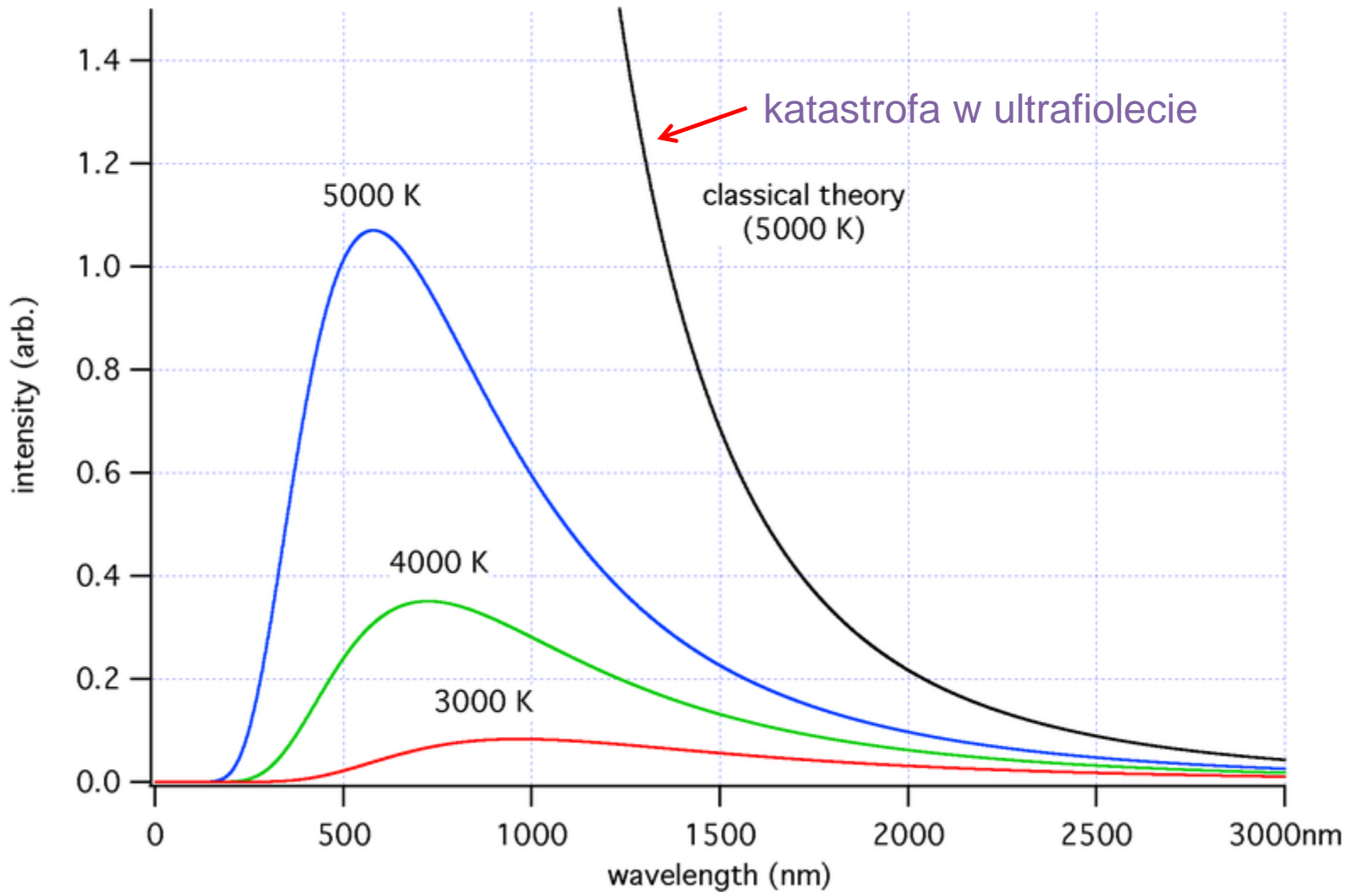
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/themes/physics/fusion/

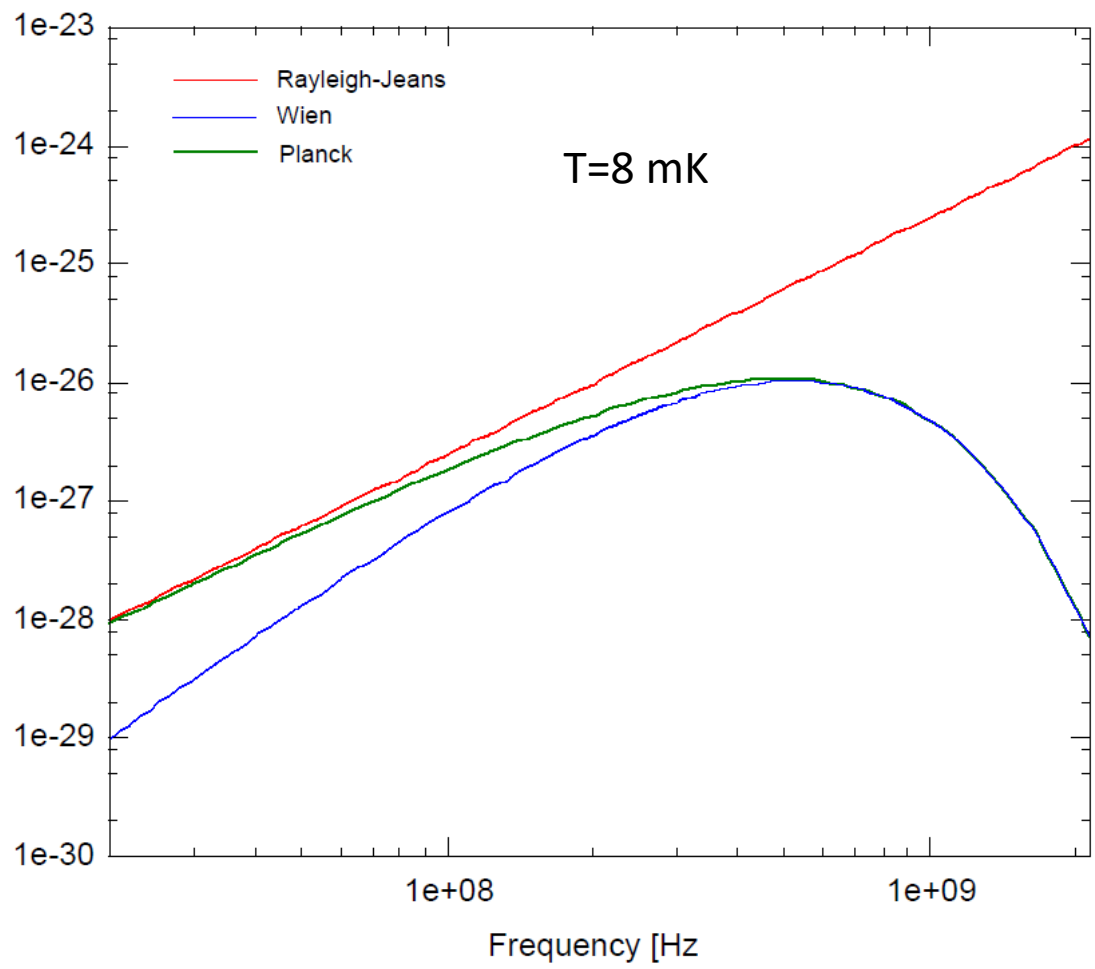
Jak Słońce świeci? = Jaki jest wiek Słońca?



UBVRI		
	λ_{eff}	$\Delta\lambda$
<i>U</i>	3663	650
<i>B</i>	4361	890
<i>V</i>	5448	840
<i>R</i>	6407	1580
<i>I</i>	7980	1540

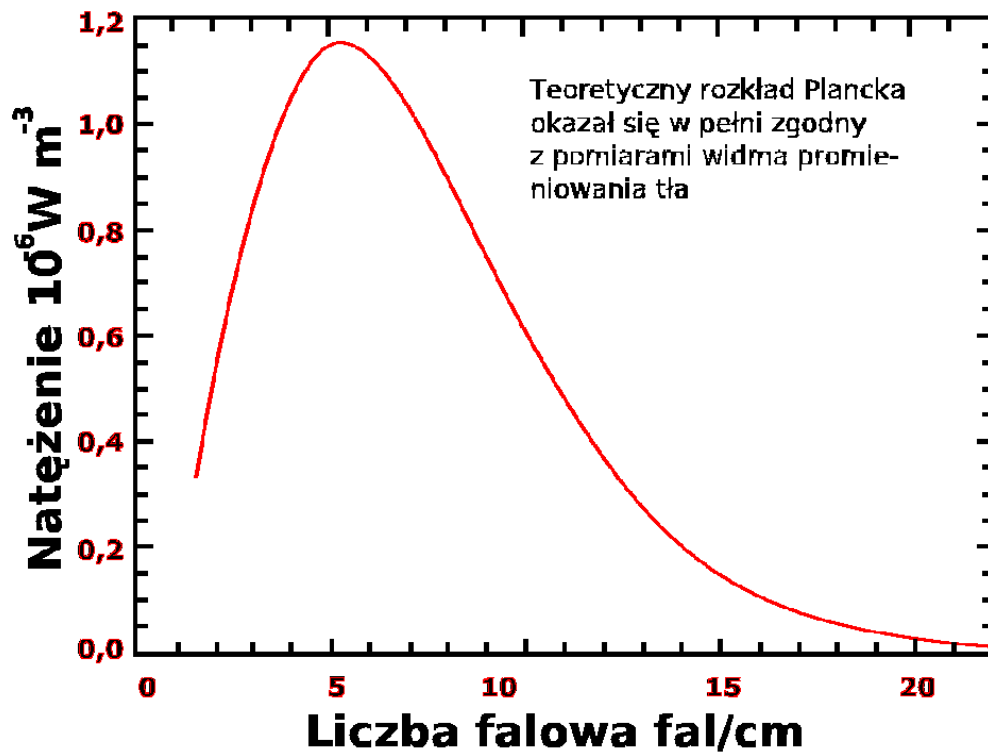
Sp	M_V	$B - V$	B.C.	$\log T_{\text{eff}}$ (K)
O5	-5.6	-0.32	-4.15	4.626
O7	-5.2	-0.32	-3.65	4.568
B0	-4.0	-0.30	-2.95	4.498
B3	-1.7	-0.20	-1.85	4.286
B7	-0.2	-0.12	-0.80	4.107
A0	0.8	+0.00	-0.25	3.982
A5	1.9	+0.14	0.02	3.924
F0	2.8	+0.31	0.02	3.863
F5	3.6	+0.43	-0.02	3.813
G0	4.4	+0.59	-0.05	3.774
G2	4.7	+0.63	-0.07	3.763
G8	5.6	+0.74	-0.13	3.720
K0	6.0	+0.82	-0.19	3.703
K5	7.3	+1.15	-0.62	3.643
M0	8.9	+1.41	-1.17	3.591
M5	13.5	+1.61	-2.55	3.491



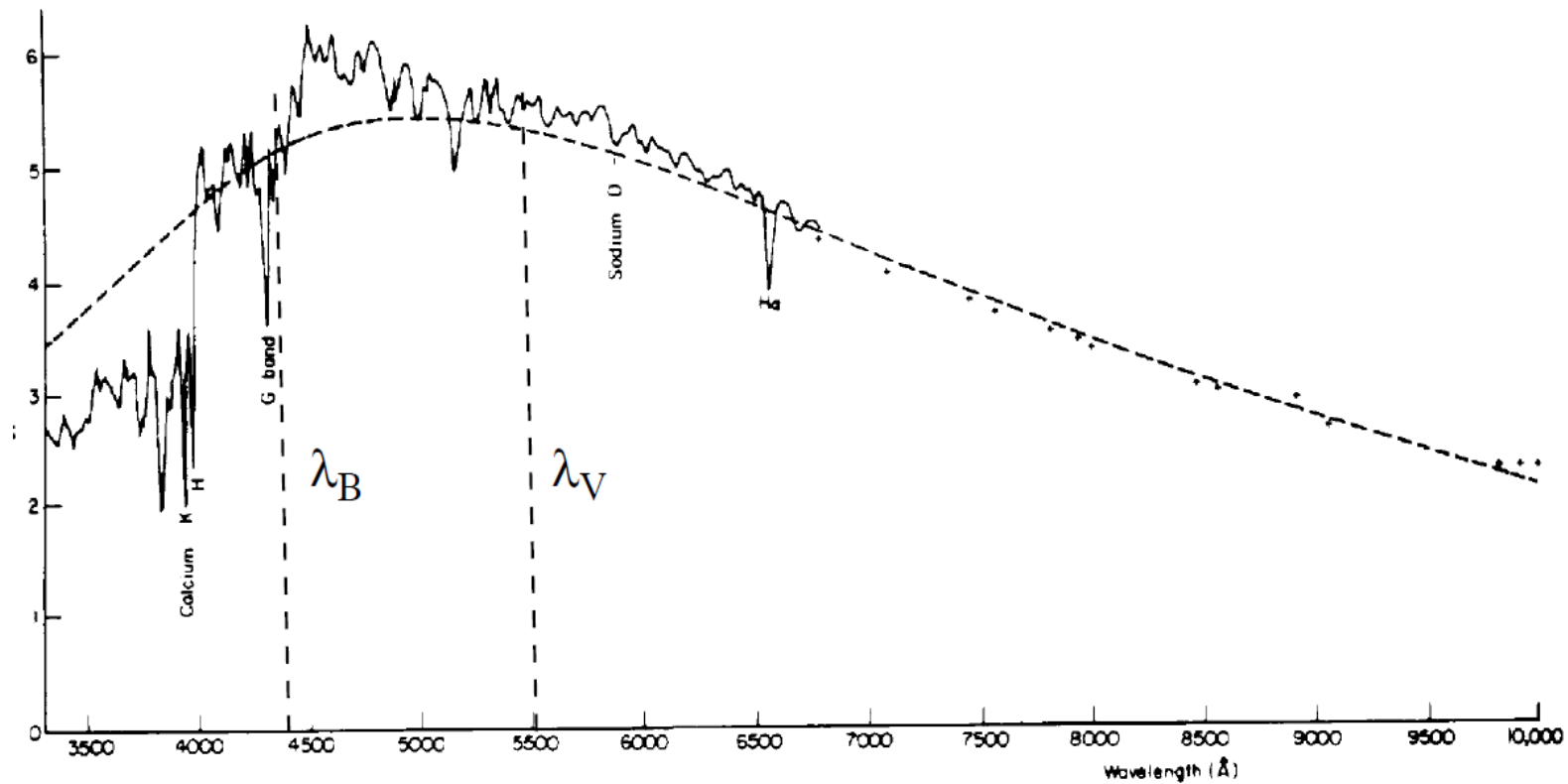


Katastrofa w UV

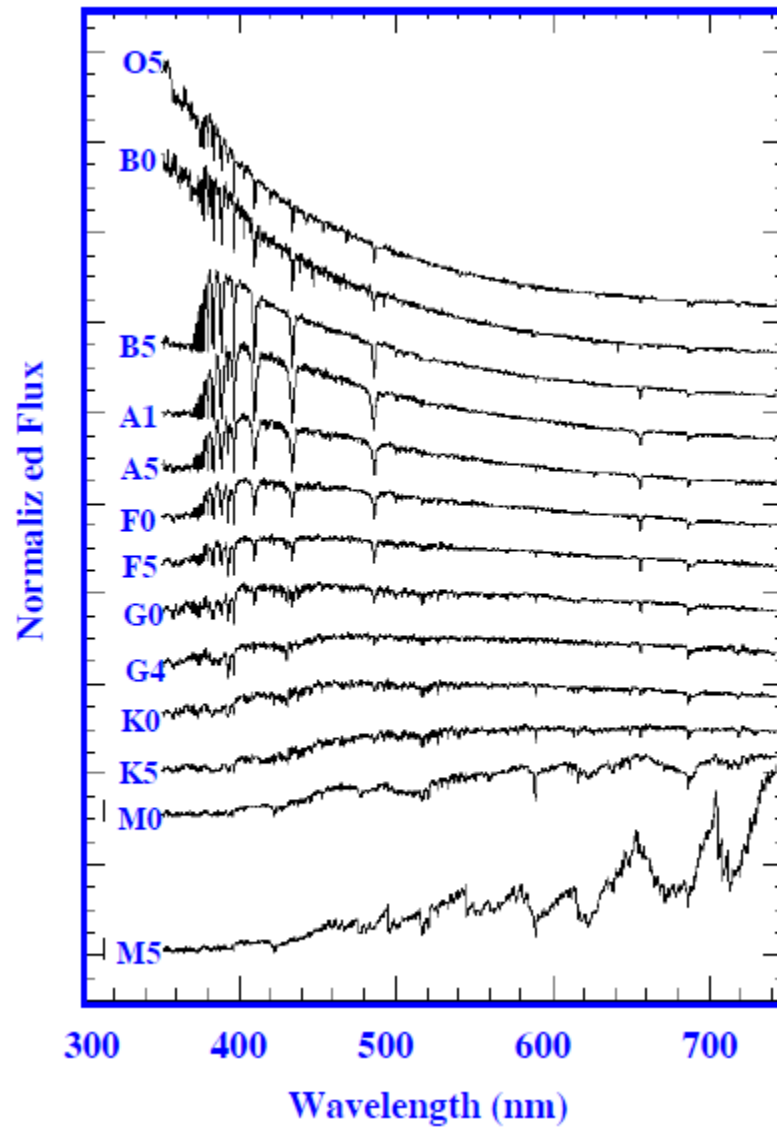
Widmo promieniowania tła uzyskane z satelity COBE



Widmo Słońca w porównaniu z rozkładem dla ciała doskonale czarnego o $T_{\text{eff}}=T_{\text{eff}}(\odot)$

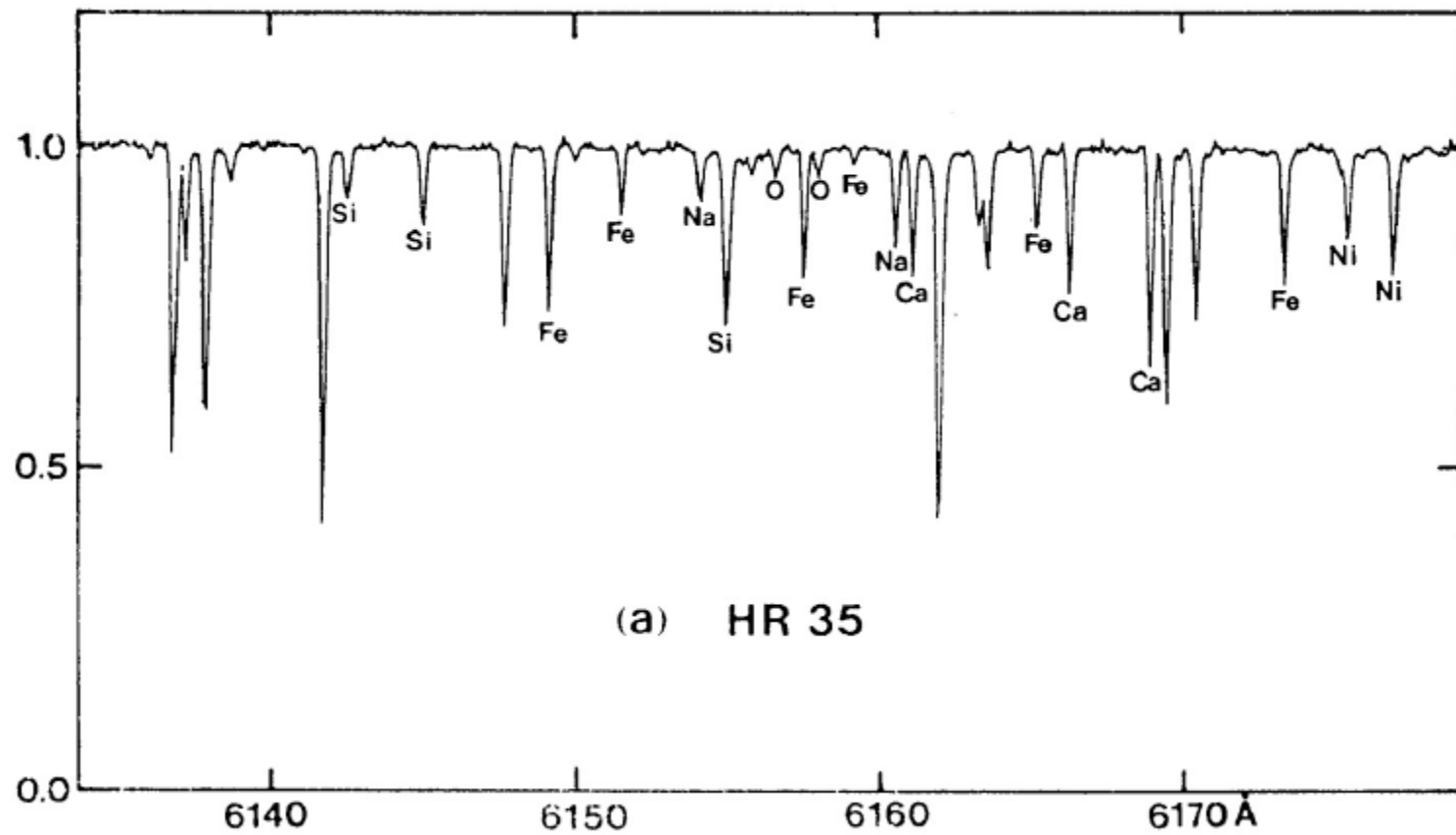


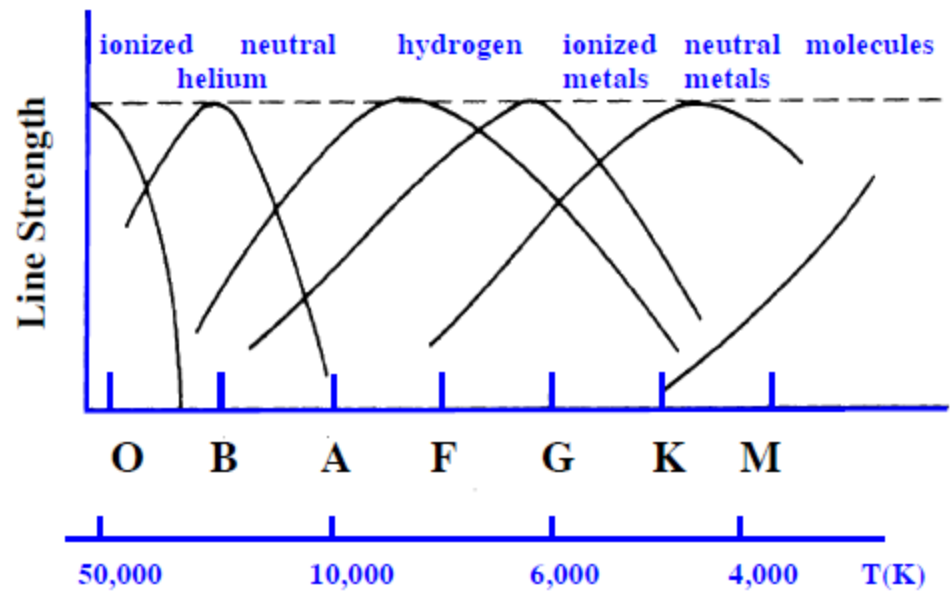
Widma gwiazd ciągu głównego



Source	X	Y	Z	Z/X
Present-day photosphere:				
Anders & Grevesse (1989) ^a	0.7314	0.2485	0.0201	0.0274
Grevesse & Noels (1993) ^a	0.7336	0.2485	0.0179	0.0244
Grevesse & Sauval (1998)	0.7345	0.2485	0.0169	0.0231
Lodders (2003)	0.7491	0.2377	0.0133	0.0177
Asplund, Grevesse & Sauval (2005)	0.7392	0.2485	0.0122	0.0165
Lodders, Palme & Gail (2009)	0.7390	0.2469	0.0141	0.0191
Present work	0.7381	0.2485	0.0134	0.0181

Asplund, Grevesse, Sauval, Scott 2009
 ARA&A 47,481





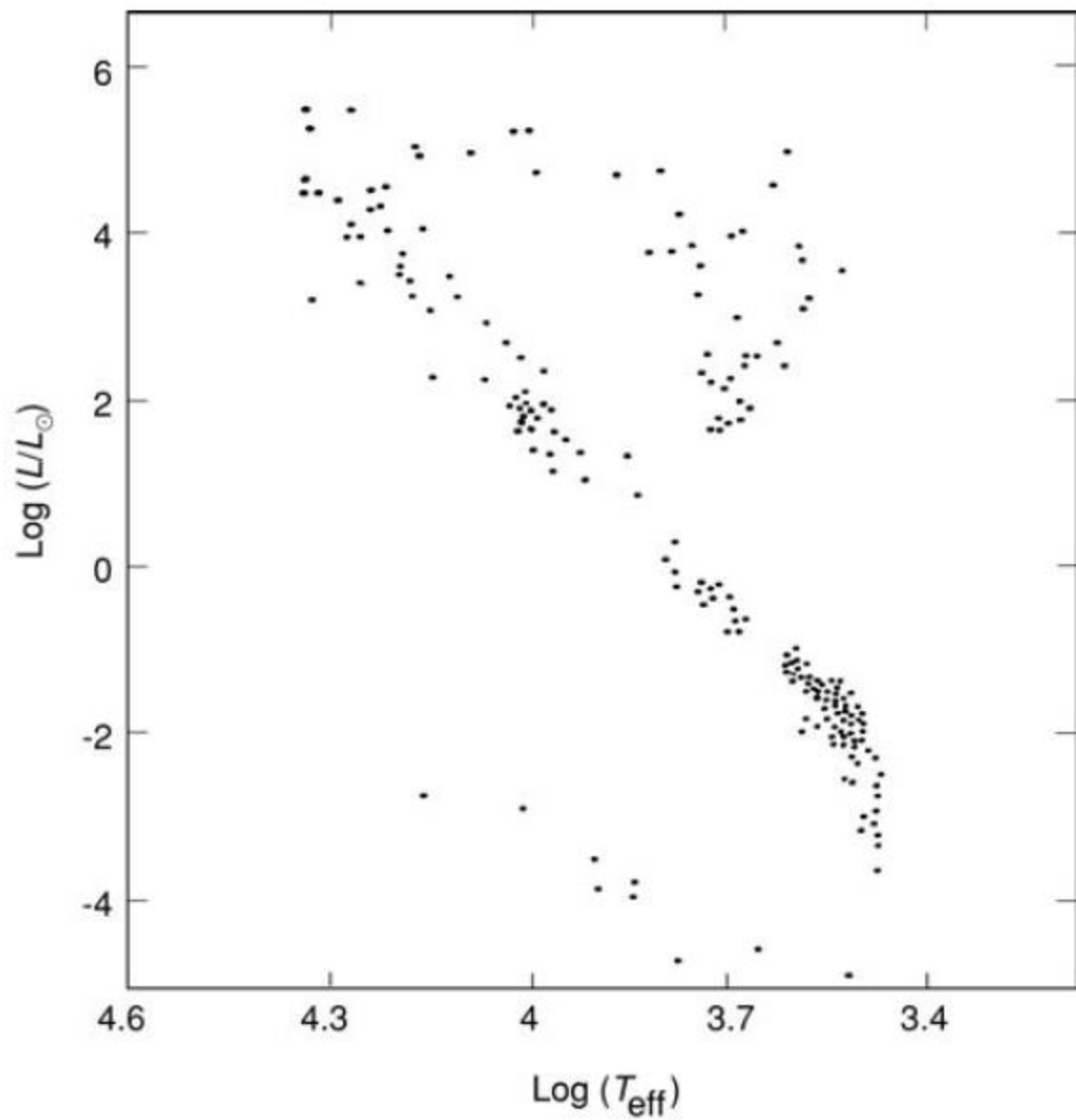
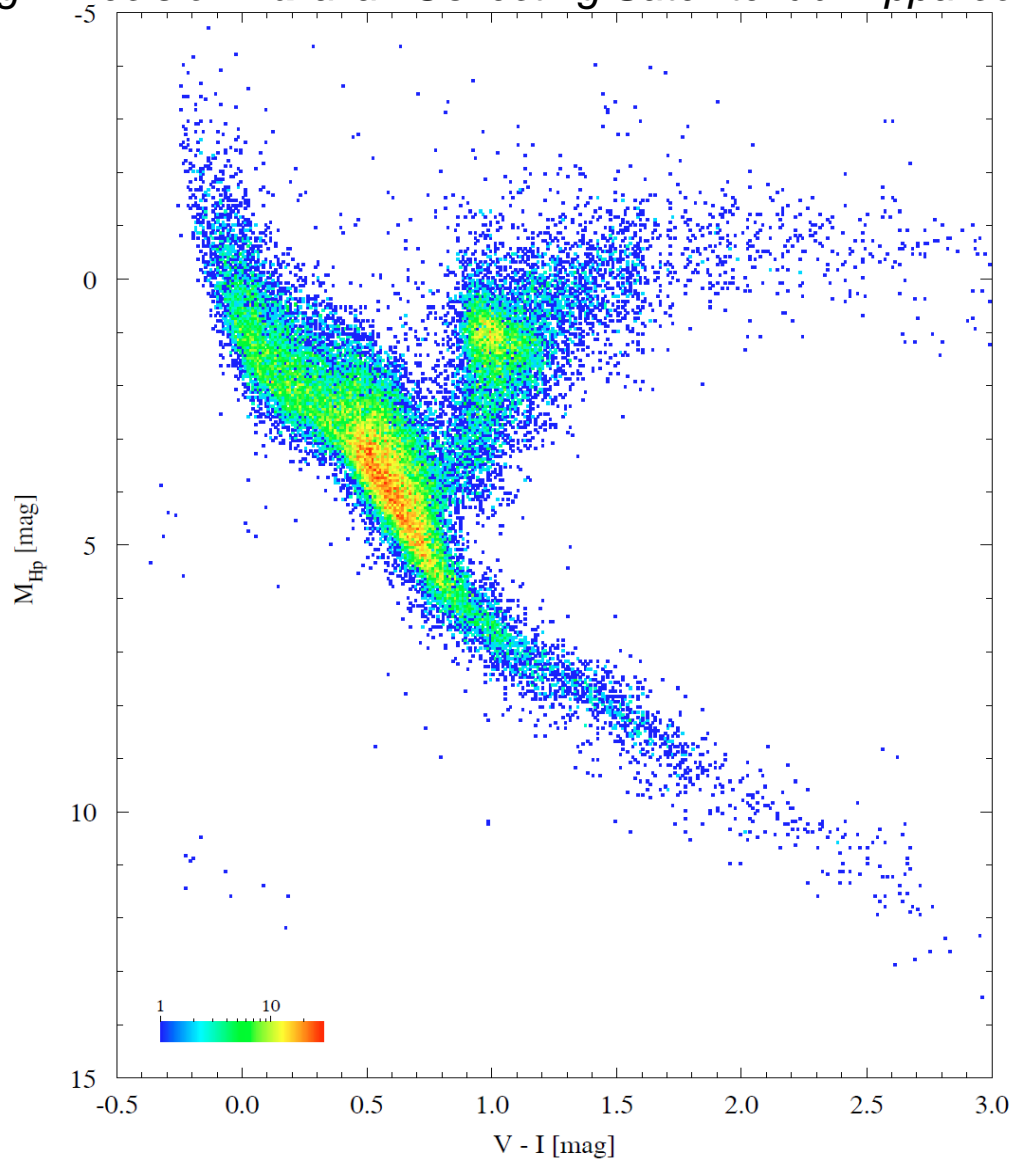
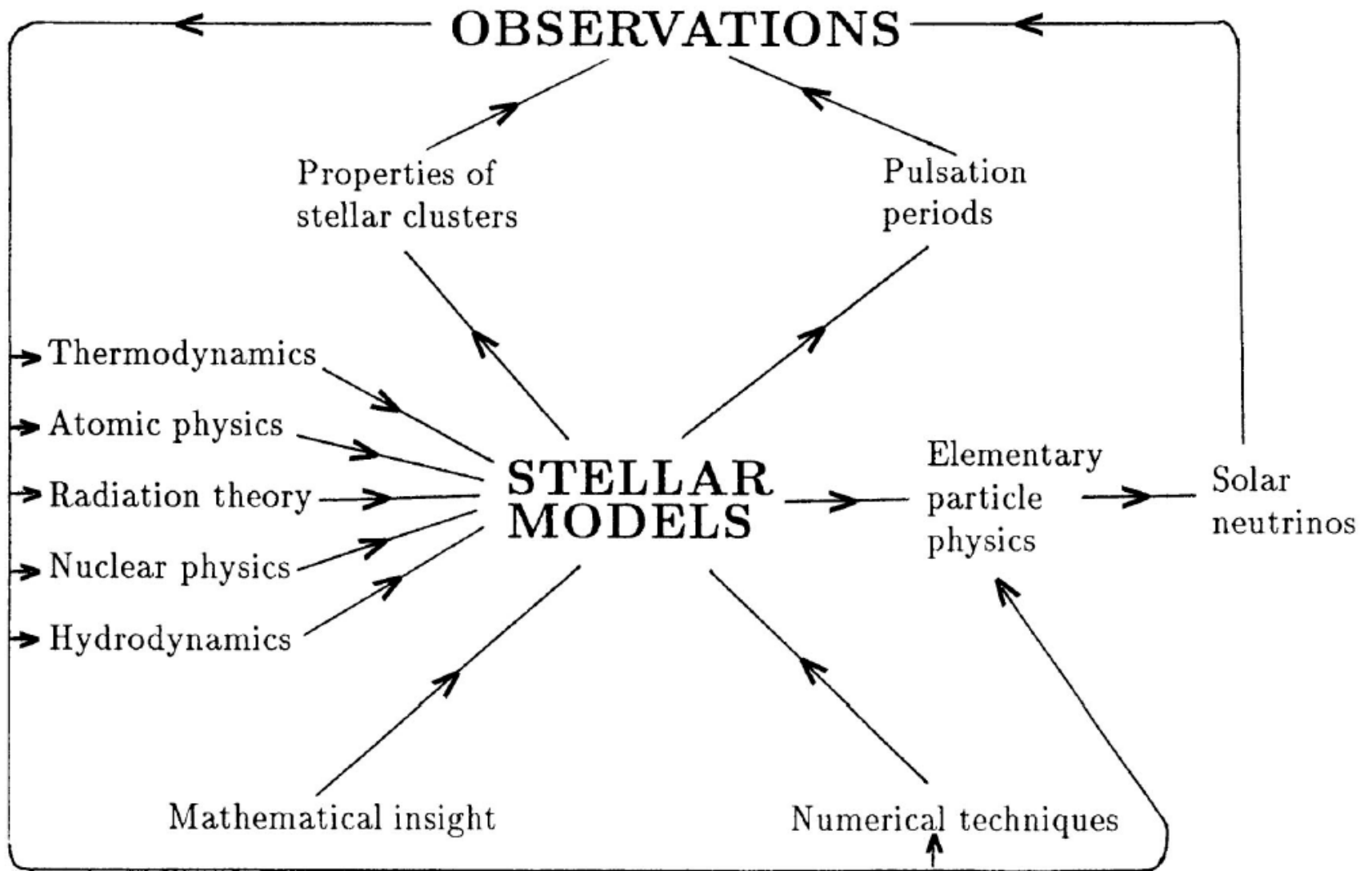


Diagram Hertzsprunga-Russella dla 41453 gwiazd z katalogu Hipparcosa (*High Precision Parallax Collecting Satellite* lub *Hipparcos Space Astrometry Mission*)



Kolory oznaczają liczbę gwiazd w „komórce” 0.01 mag w $(V-I)$ i 0.05 mag w Hp (M_{Hp}).



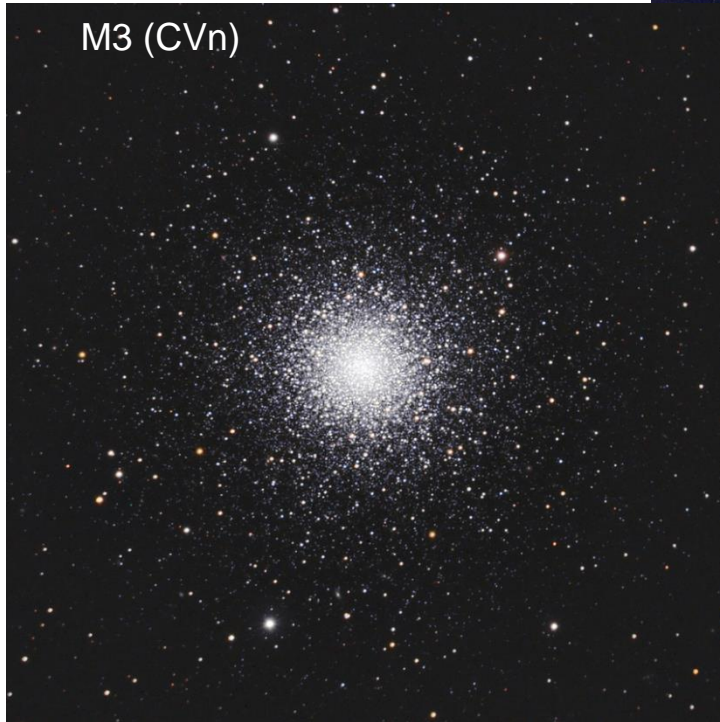
Plejady

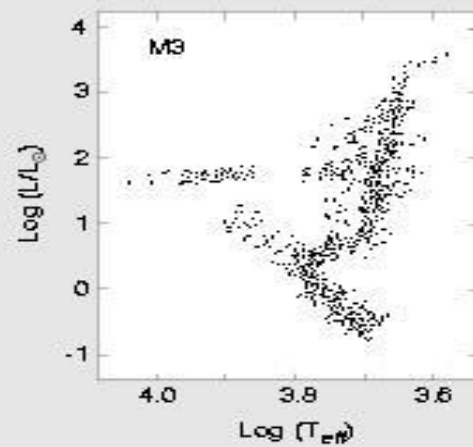
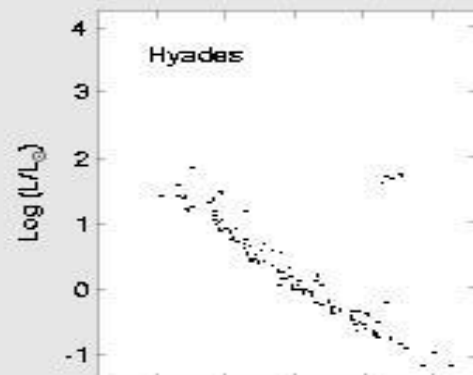
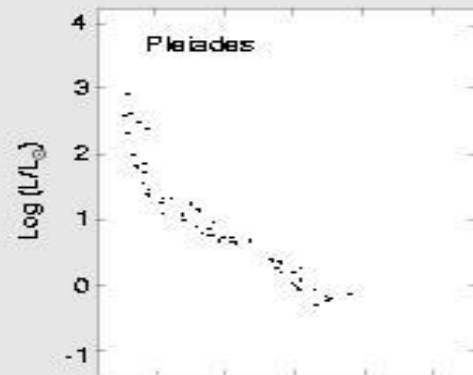


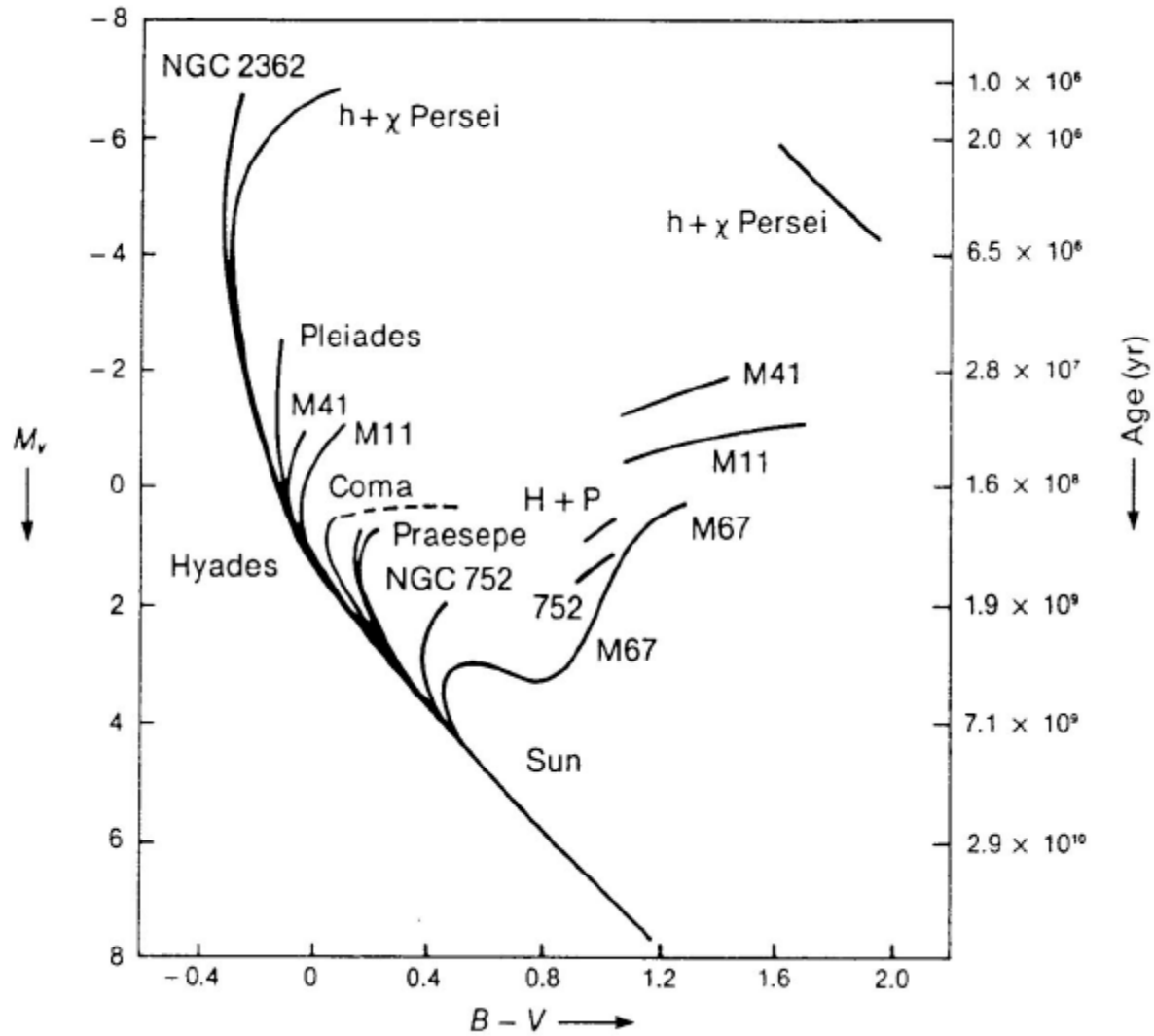
Hiady



M3 (CVn)

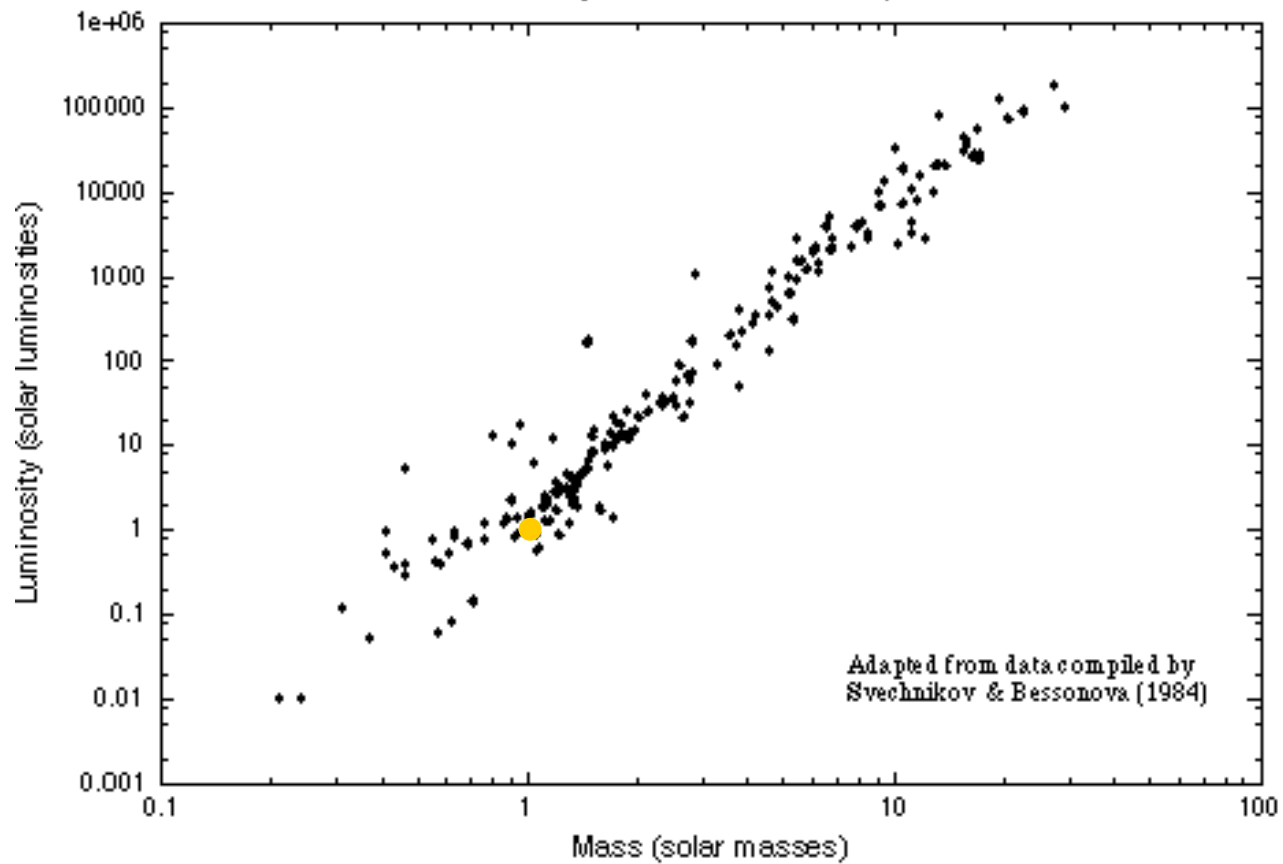




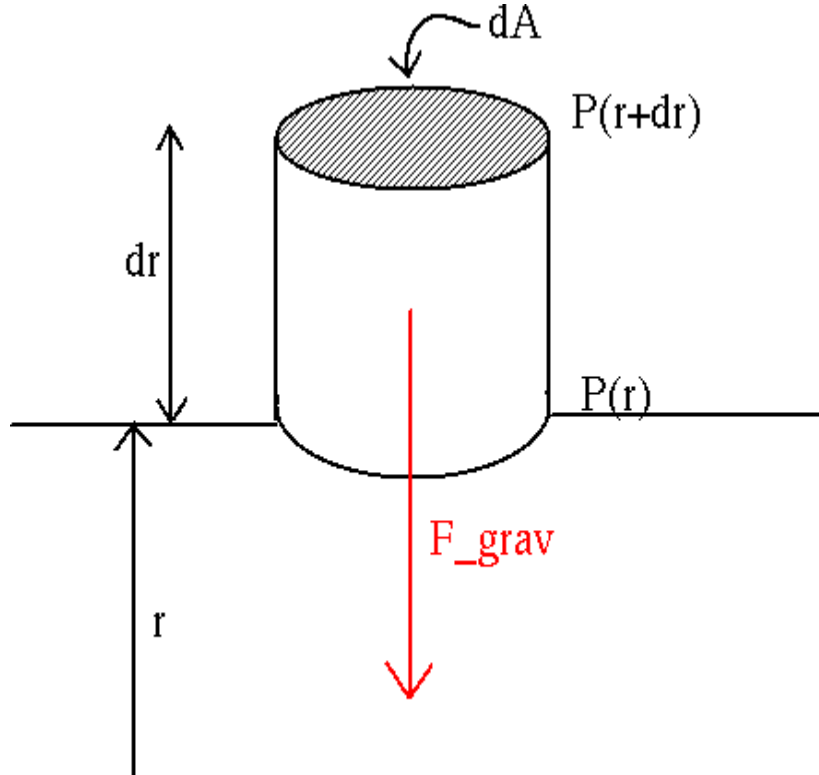


Sandage 1957

Mass-Luminosity Relation for Main Sequence Stars



Równowaga hydrostatyczna



$$\begin{aligned} F_{grav} &= -\frac{GM(r)dm}{r^2} \\ &= -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)drdA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{press} &= (P(r+dr) - P(r))dA \\ &= dPdA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{press} &= F_{grav} \\ dPdA &= -g(r)\rho(r)drdA \end{aligned}$$

Równowaga hydrostatyczna

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g = -\frac{Gm}{r^2} \rho \quad \text{formalizm Eulera}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \text{formalizm Lagrange'a}$$

Dynamiczna skala czasu

$$\tau_{\text{dyn}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

$$\tau_{\text{dyn}} \approx 26 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \text{ [min]}$$

Typowe wartości τ_{dyn} w różnych typach gwiazd:

GWIAZDA	ρ [g/cm ³]	τ_{dyn}
gwiazda neutronowa	10^{15}	0.06 ms
Biały karzeł	10^6	2 s
Słońce	1,41	26 min
Czerwony nadolbrzym	10^{-9}	2 lata

Termiczna skala czasu

$$\tau_{\text{th}} \approx \left(\frac{GM^2}{RL} \right)$$

$$\tau_{\text{th}} \approx 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

Nuklearna skala czasu

$$\tau_{\text{nu}} \approx \frac{0.007\alpha M c^2}{L}$$

$$\tau_{\text{nu}} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

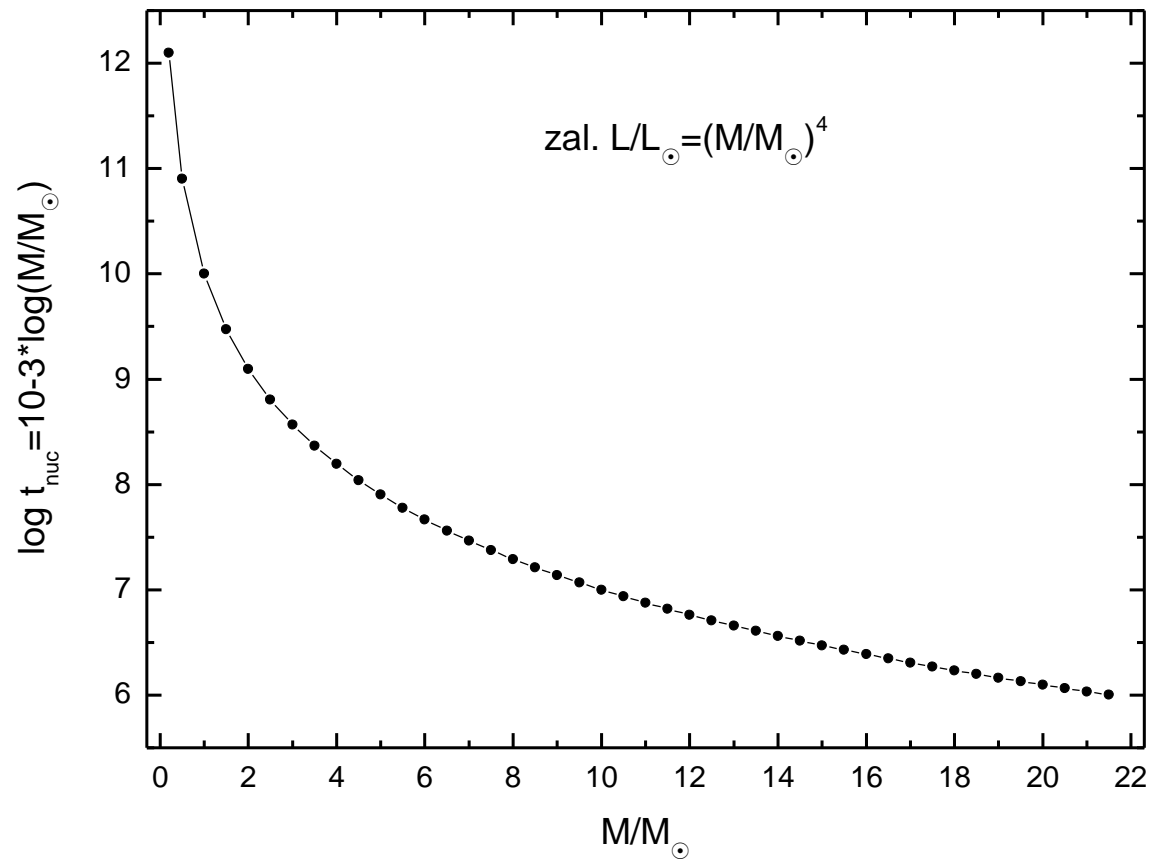


Tabela 5.1. Parametry i skale czasowe gwiazd wieku zero (ZAMS).
(6.263 + 03 oznacza $6,263 \cdot 10^3$)

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{R}{R_{\odot}}$	T_{eff} [K]	$\frac{L}{L_{\odot}}$	τ_{dyn} [min]	$\tau_{\text{K-H}}$ [rok]	τ_n [rok]
10.0	3.74	26564	6.263 + 03	6.086 + 01	6.664 + 04	1.649 + 07
8.9	3.50	25061	4.345 + 03	5.837 + 01	8.154 + 04	2.118 + 07
7.9	3.28	23599	2.992 + 03	5.597 + 01	1.005 + 05	2.742 + 07
7.1	3.07	22172	2.042 + 03	5.367 + 01	1.250 + 05	3.581 + 07
6.3	2.87	20797	1.383 + 03	5.143 + 01	1.567 + 05	4.712 + 07
5.6	2.69	19476	9.315 + 02	4.932 + 01	1.975 + 05	6.234 + 07
5.0	2.51	18218	6.240 + 02	4.727 + 01	2.504 + 05	8.295 + 07
4.5	2.35	17006	4.153 + 02	4.536 + 01	3.191 + 05	1.111 + 08
4.0	2.20	15853	2.752 + 02	4.356 + 01	4.085 + 05	1.494 + 08
3.5	2.07	14754	1.815 + 02	4.188 + 01	5.248 + 05	2.019 + 08
3.2	1.94	13712	1.192 + 02	4.033 + 01	6.760 + 05	2.739 + 08
2.8	1.82	12717	7.784 + 01	3.889 + 01	8.757 + 05	3.739 + 08
2.5	1.71	11776	5.021 + 01	3.735 + 01	1.151 + 06	5.167 + 08
2.2	1.62	10872	3.278 + 01	3.651 + 01	1.478 + 06	7.053 + 08
2.0	1.53	10002	2.105 + 01	3.563 + 01	1.931 + 06	9.790 + 08
1.8	1.46	9164	1.344 + 01	3.505 + 01	2.523 + 06	1.366 + 09
1.6	1.40	8329	8.449 + 00	3.491 + 01	3.322 + 06	1.937 + 09
1.4	1.36	7489	5.200 + 00	3.536 + 01	4.417 + 06	2.805 + 09
1.3	1.28	6795	3.125 + 00	3.421 + 01	6.202 + 06	4.161 + 09
1.1	1.13	6311	1.818 + 00	3.013 + 01	9.576 + 06	6.374 + 09
1.0	0.99	5872	1.037 + 00	2.600 + 01	1.530 + 07	9.963 + 09
0.9	0.87	5435	5.916 - 01	2.281 + 01	2.414 + 07	1.556 + 10
0.8	0.78	4975	3.367 - 01	2.064 + 01	3.743 + 07	2.437 + 10
0.7	0.71	4555	1.921 - 01	1.870 + 01	5.780 + 07	3.805 + 10
0.6	0.62	4274	1.141 - 01	1.622 + 01	8.834 + 07	5.712 + 10
0.6	0.53	4084	7.138 - 02	1.385 + 01	1.295 + 08	8.136 + 10
0.5	0.46	3954	4.729 - 02	1.188 + 01	1.787 + 08	1.094 + 11
0.4	0.41	3862	3.339 - 02	1.040 + 01	2.283 + 08	1.382 + 11

$$\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{nuc}}$$

Twierdzenie o wiriale

$$E_k = -\frac{1}{2} \Omega$$

$$E = U + \Omega$$

Gaz jednoatomowy doskonały: $E_k = U$

$$E = E_k + \Omega = -E_k = \frac{1}{2} \Omega$$

RÓWNANIA BUDOWY WEWNĘTRZNEJ I EWOLUCJI

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

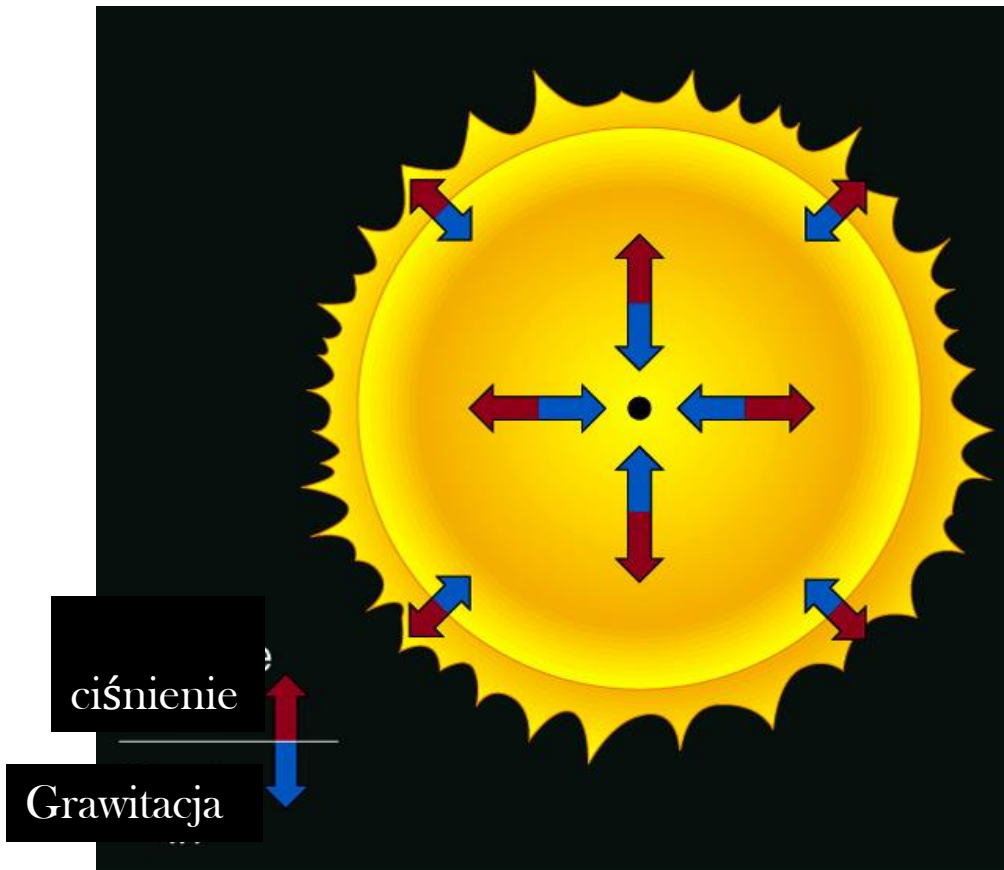
$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \Delta\nabla & \text{if } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) \quad [+ \text{ mixing terms}] \quad i = 1 \dots N$$

Równowaga hydrostatyczna



$$\cancel{\frac{dv}{dt}}$$

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Równowaga termiczna

$$\cancel{\varepsilon_g = T \frac{\partial S}{\partial t}} \quad \cancel{\varepsilon_\nu}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon$$

Przyrost strumienia promieniowania w warstwie o masie dm jest równy energii wyprodukowanej przez tę warstwę w reakcjach jądrowych

Transport energii

Promieniowanie

Fotony

Przewodnictwo

atomy, elektrony

Konwekcja

bąble materii

Transport promienisty

Przybliżenie dyfuzyjne

$$F_{\text{dyf}} = -D \nabla N$$

$$D = (v l) / 3$$

Fotony:

$$v \rightarrow c$$

$$l \rightarrow l_{\text{ph}} = 1 / (\kappa \rho)$$

$$N = U_{\text{rad}} = a T^4$$

Równanie transportu energii

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla,$$

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\sigma G} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

transport promienisty

jeśli

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$$

transport konwektywny

Zmiana składu chemicznego


Zazwyczaj uwzględniamy tylko zmiany składu chemicznego powodowane przez reakcje jądrowe.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right]$$

r_{ji} - tempo powstawania izotopu i z izotopu j

r_{ik} - tempo przemiany izotopu i w izotop k

Dane mikrofizyki

- równanie stanu, $P=P(\rho, T, X_i)$
 - nieprzezroczystości materii, $\kappa=\kappa(\rho, T, X_i)$
 - tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$
 - tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, X_i)$
- 

Równanie stanu

Gaz doskonały

$$P = NkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

dla gwiazd masywnych

Ciśnienie promieniowania

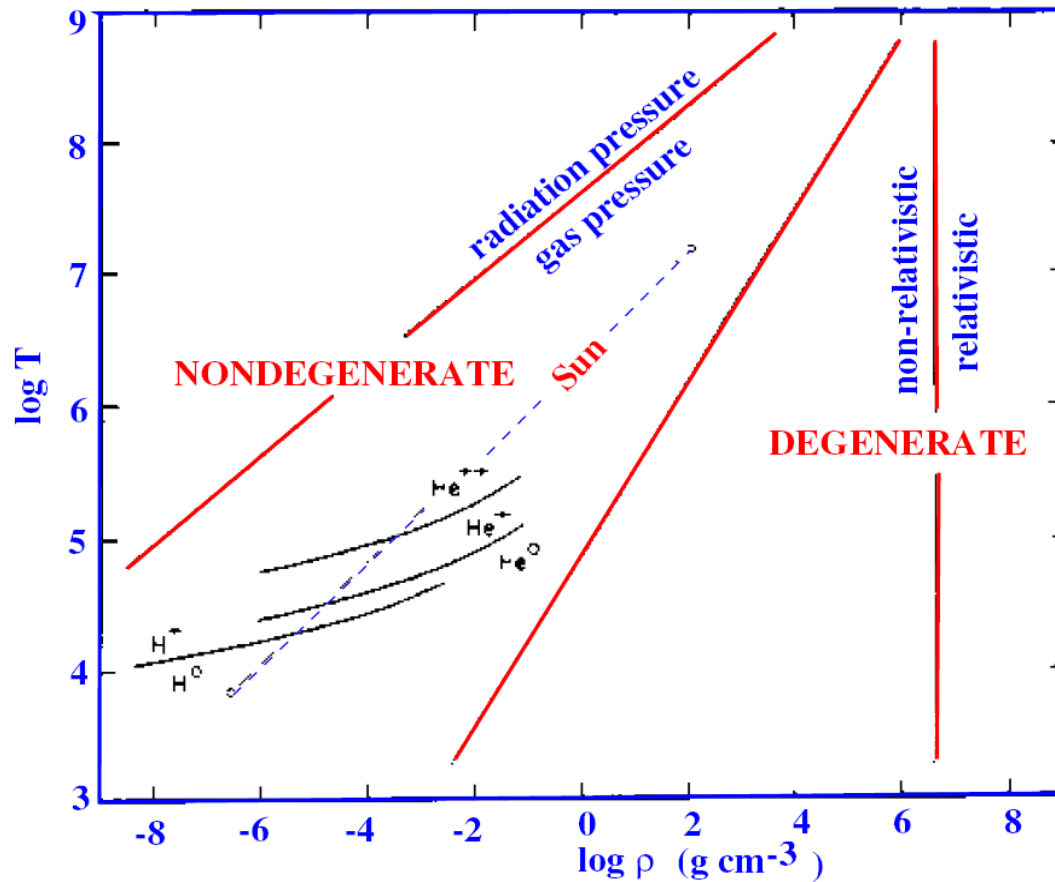
$$P = \rho kT / (\mu m_H) + aT^4 / 3$$

Gaz zdegenerowany

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{20m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} = 1.0036 \times 10^{13} \text{ [cgs]}$$

$$P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad K_{ER} = \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} = 1.2435 \times 10^{15} \text{ [cgs]}$$

Równanie stanu



nieprzezroczystość materii, κ , zależy od

- ◆ **temperatury**
- ◆ **gęstości**
- ◆ **składu chemicznego**

nieprzezroczystość determinuje transport promieniowania przez materię

Wysokie temperatury

$$\kappa = 0.02(1+X) \text{ (rozp. Thomsona)}$$

Pośrednie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho T^{-3.5} \text{ (wzór Kramersa)}$$

bardzo niskie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^4$$

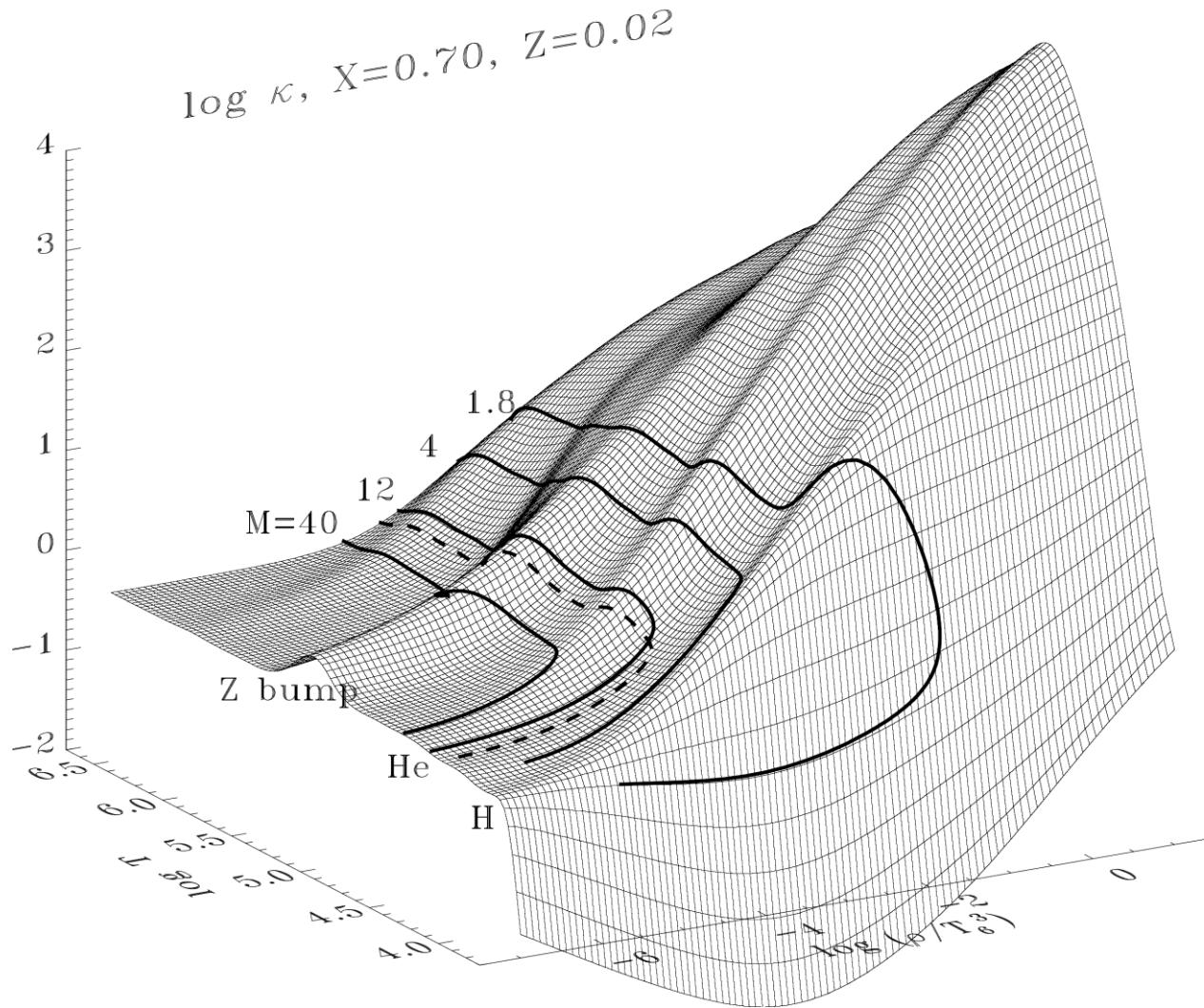
W praktyce liczy się prawdopodobieństwa procesów, w których foton o energii $h\nu$ zostanie pochłonięty lub rozproszony.

metody perturbacyjne mechaniki kwantowe



przekroje czynne dla różnych procesów

Nieprzezroczystość, $\kappa(\text{OPAL})$, w zależności od $\log T$ i $\log \rho/T_6^3$ ($T_6 = T/10^6$)



Tempa reakcji jądrowych, $r_{jk} = r_{jk}(\rho, T, X_i)$

- ✘ tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X_i)$
- ✘ strumień neutrin
- ✘ zmiany składu chemicznego

Prawdopodobieństwo przeniknięcia bariery kulombowskiej (współczynnik Gamowa)

$$P_p(v) \propto \exp[-(4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2 / hv)]$$

Tempo produkcji energii $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^{\eta_1} T^{\eta_2}$ erg/g/s

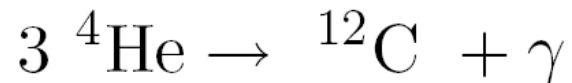
przemiana wodoru w hel



Cykl p-p $\varepsilon_{\text{PP}} \simeq \varepsilon_1 X_{\text{H}}^2 \rho T^4$;

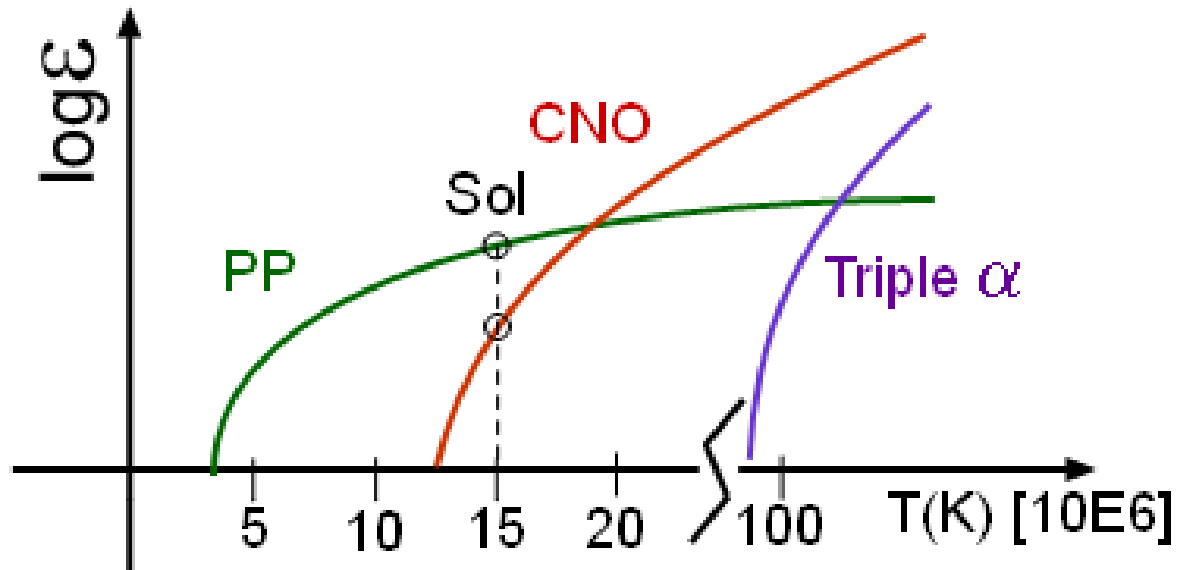
Cykl CNO $\varepsilon_{\text{CNO}} \simeq \varepsilon_2 X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} \rho T^{20}$.

przemiana helu w węgiel



Reakcja 3 α $\varepsilon_{3\alpha} \simeq \varepsilon_3 X_{\text{He}}^3 \rho^2 T^{30}$.

Wydajność energetyczna reakcji



Warunki brzegowe

W centrum: $m=0 \rightarrow r=0, L_r=0$

Na powierzchni: $m=M \rightarrow P=0, T=(L/8\pi R^2\sigma)^{1/4}$

W centrum gwiazdy musimy dopasować:
gęstość centralną ρ_c oraz temperaturę centralną T_c .
Natomiast na powierzchni gwiazdy:
promień R oraz moc promieniowania L .

Tylko (R i L) mogą być wyznaczone z obserwacji.

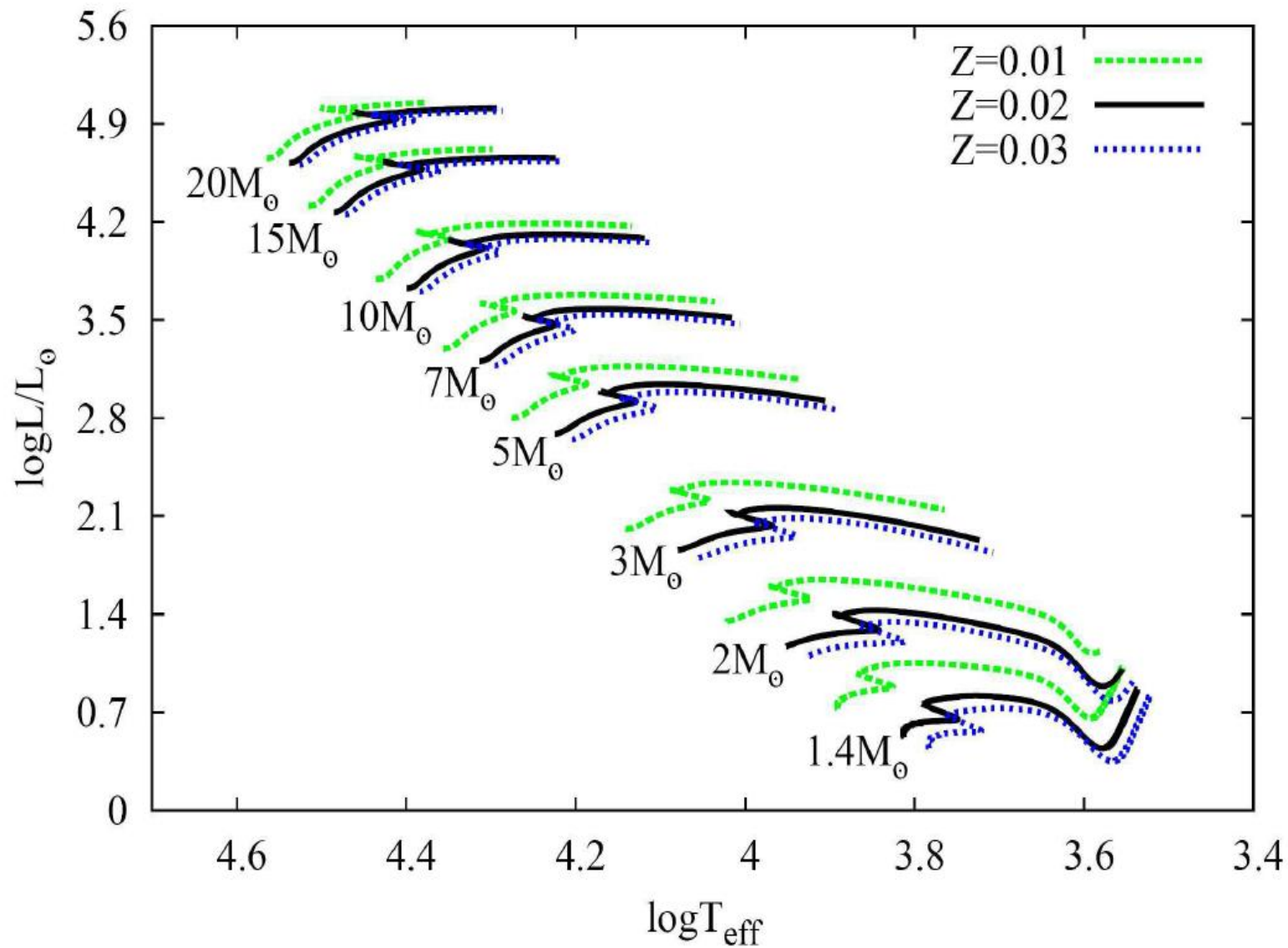
Mamy $4+I$ równań różniczkowych na $4+I$ niewiadome: $r, P, T, L_r, X_1, \dots, X_I$ w funkcji (m, t)

Dla danego ΣX_i i czasu t ,
rozwiązujemy równania na r, P, T, L_r .

$$X(m, t + \Delta t) \approx X(m, t) + \Delta t r_X(m, t)$$

Dostajemy ciąg modeli ewolucyjnych, w którym model w czasie t_i zależy od modelu w czasie t_{i-1} .

Parametrem odróżniającym modele jest masa.

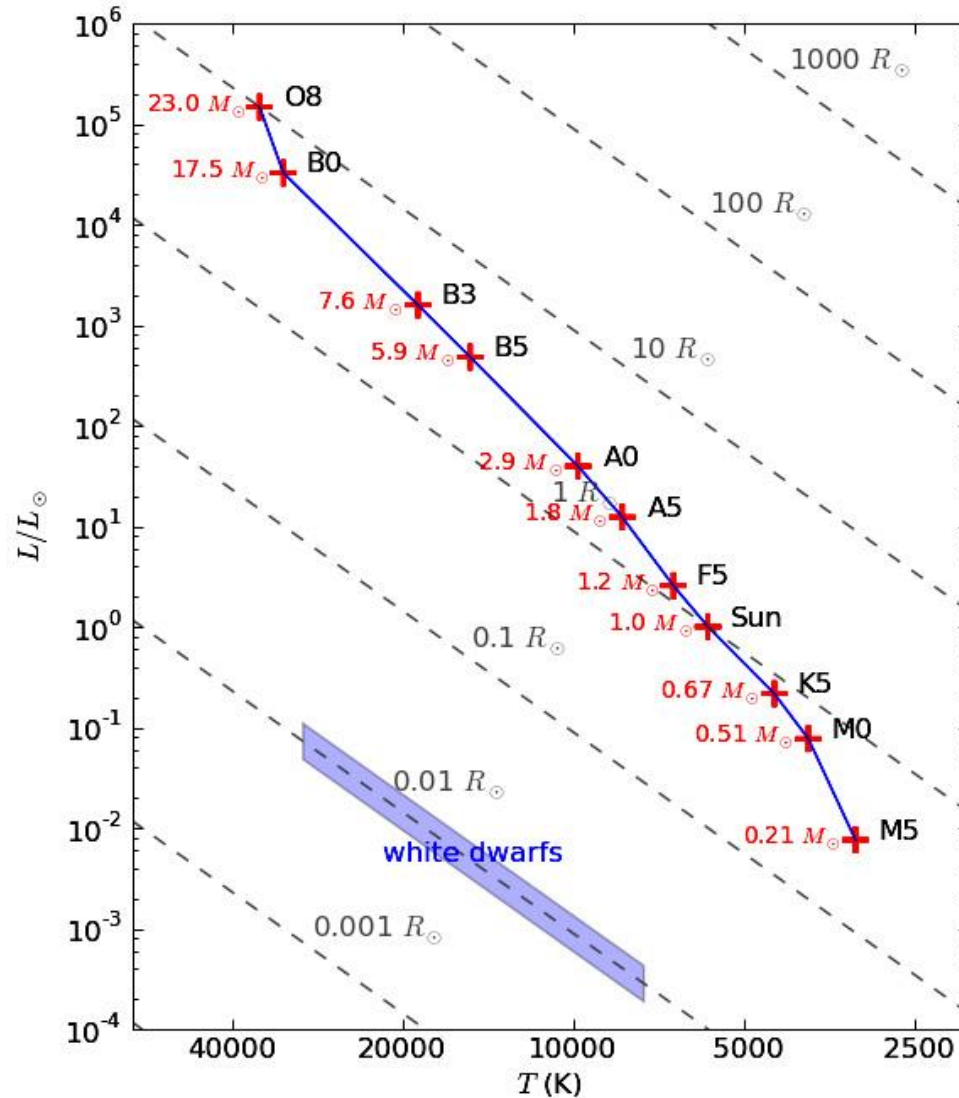


Gwiazda ciągu głównego wieku zero

Gwiazda, która „zapaliła” już wodór, a jego „spalanie” wytwarza tyle energii ile jest wypromieniowanej z powierzchni. Jednocześnie nie ma jeszcze pomniejszenia obfitości wodoru.

Gwiazda w równowadze hydrostatycznej, termicznej i chemicznie jednorodna.

ciąg główny wieku zero i linie stałych promieni

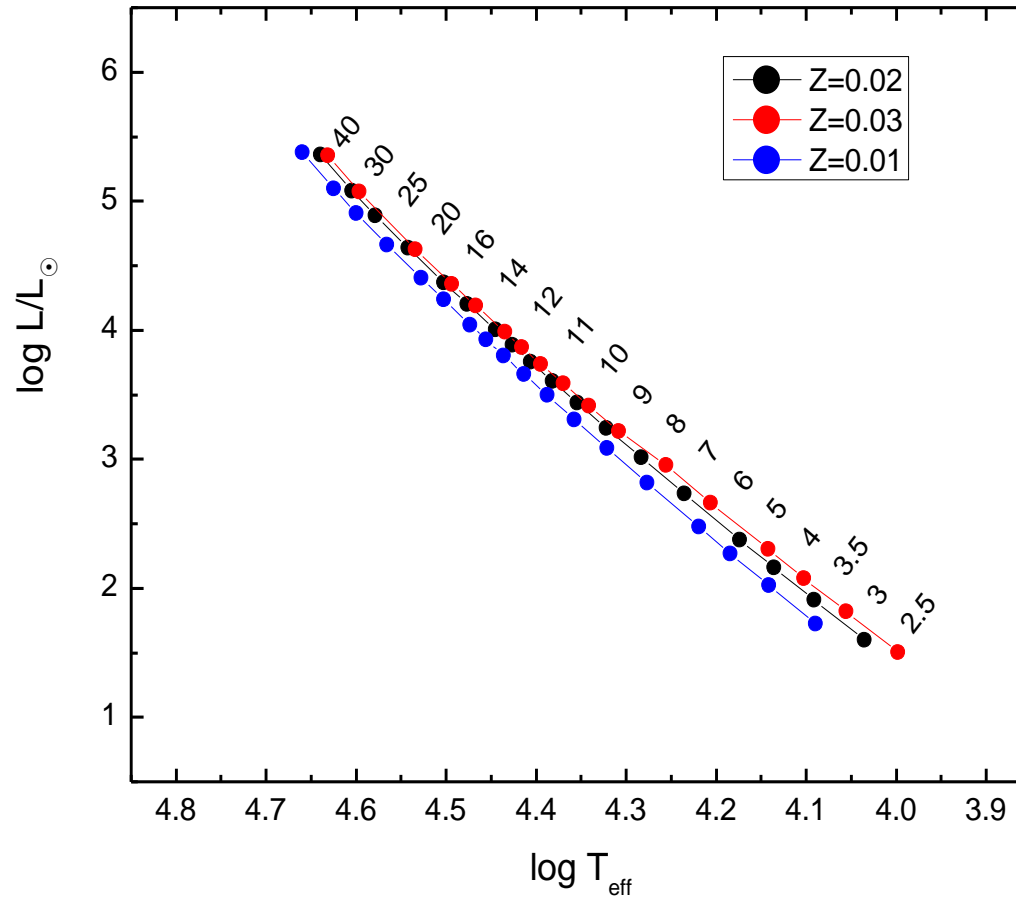


Ciąg główny wieku zero (ZAMS=Zero Age Main Sequence)

X=0.70, Z=0.02, κ OPAL, GN93, OPAL EOS, $\alpha_{\text{conv}}=1.0$, Vrot=0.0

M	Ig(t)	IgTs	IgTeff	Ig L	Iggeff	IgTc	IgRhoc	Xc	Mc/M
1.0	0.0000	3.6505	3.7262	-0.1368	4.4309	7.1335	1.9265	.7000000	.0000
1.1	0.0000	3.6746	3.7503	0.0672	4.3646	7.1680	1.9355	.7000000	.0007
1.2	0.0000	3.6983	3.7740	0.2515	4.3129	7.1995	1.9405	.7000000	.0110
1.3	0.0000	3.7229	3.7986	0.4163	4.2814	7.2272	1.9401	.7000000	.0287
1.7	0.0000	3.8307	3.9064	0.9269	4.3185	7.3000	1.8834	.7000000	.1083
2.0	0.0000	3.8882	3.9639	1.2149	4.3310	7.3297	1.8155	.7000000	.1444
2.5	0.0000	3.9599	4.0357	1.5989	4.3311	7.3617	1.7034	.7000000	.1792
3.0	0.0000	4.0152	4.0911	1.9061	4.3248	7.3842	1.6051	.7000000	.2015
4.0	0.0000	4.0982	4.1741	2.3773	4.3106	7.4164	1.4463	.7000000	.2281
5.0	0.0000	4.1592	4.2352	2.7309	4.2983	7.4397	1.3241	.7000000	.2461
6.0	0.0000	4.2070	4.2830	3.0119	4.2878	7.4578	1.2263	.7000000	.2614
7.0	0.0000	4.2458	4.3219	3.2431	4.2790	7.4726	1.1464	.7000000	.2751
8.0	0.0000	4.2783	4.3544	3.4388	4.2713	7.4850	1.0790	.7000000	.2887
9.0	0.0000	4.3058	4.3820	3.6068	4.2648	7.4955	1.0217	.7000000	.3006
10.0	0.0000	4.3298	4.4060	3.7544	4.2590	7.5047	0.9719	.7000000	.3158
12.0	0.0000	4.3692	4.4453	4.0015	4.2487	7.5197	0.8890	.7000000	.3420
14.0	0.0000	4.4008	4.4770	4.2027	4.2409	7.5319	0.8235	.7000000	.3701
16.0	0.0000	4.4267	4.5029	4.3707	4.2344	7.5420	0.7695	.7000000	.3965
20.0	0.0000	4.4666	4.5426	4.6377	4.2235	7.5578	0.6856	.7000000	.4452
25.0	0.0000	4.5023	4.5784	4.8879	4.2132	7.5724	0.6084	.7000000	.4996
30.0	0.0000	4.5282	4.6043	5.0802	4.2038	7.5835	0.5502	.7000000	.5447
40.0	0.0000	4.5632	4.6393	5.3616	4.1873	7.5993	0.4653	.7000000	.6186
60.0	0.0000	4.5991	4.6752	5.7188	4.1500	7.6189	0.3580	.7000000	.7151
90.0	0.0000	4.6141	4.6902	6.0366	4.0687	7.6357	0.2609	.7000000	.7938

ZAMS



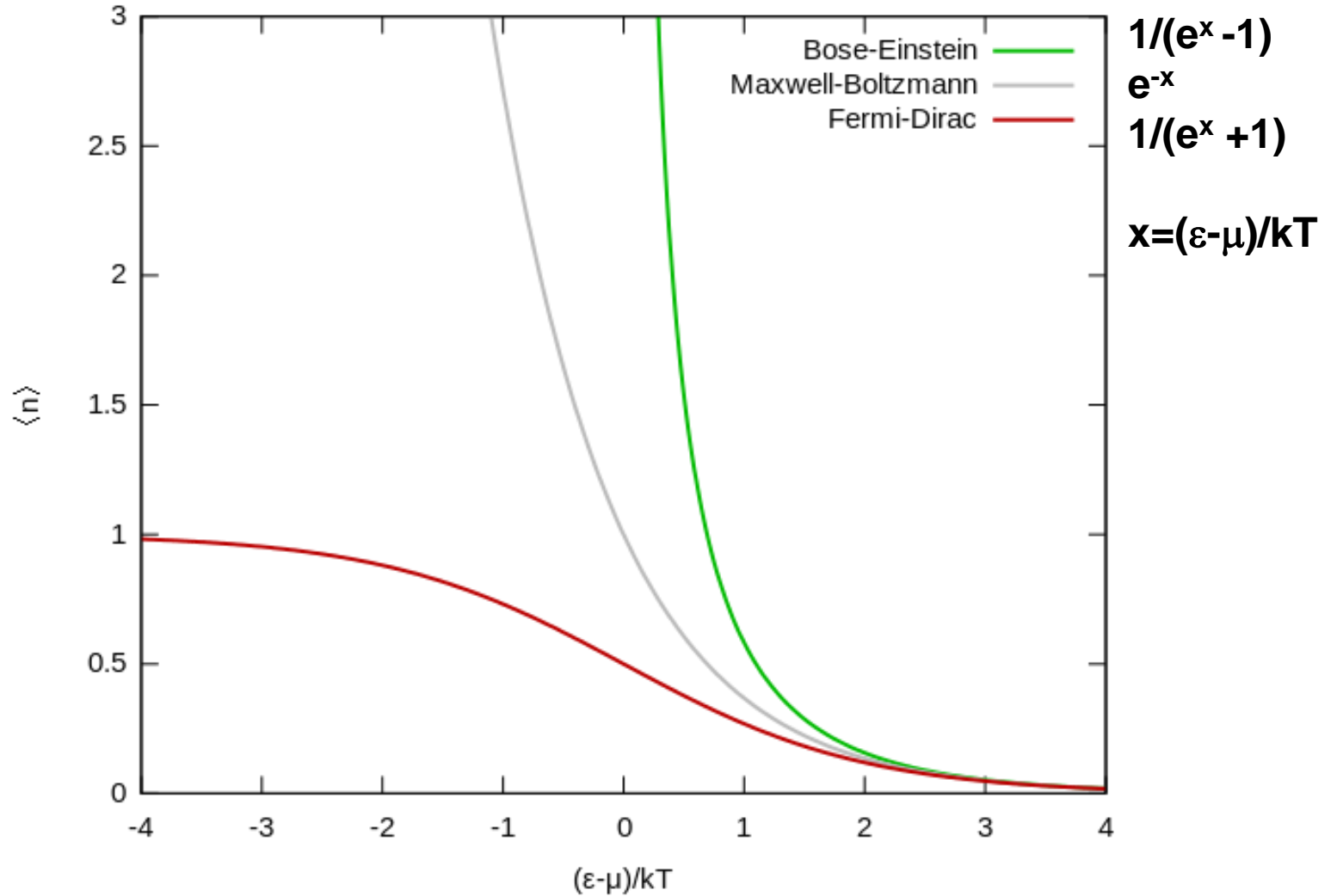
Twierdzenie Vogta–Russell'a:

- 1) **każdej konfiguracji o danym składzie chemicznym i danej masie odpowiada jeden ściśle określony punkt na diagramie H–R, przy czym różnym masom odpowiadają różne punkty**

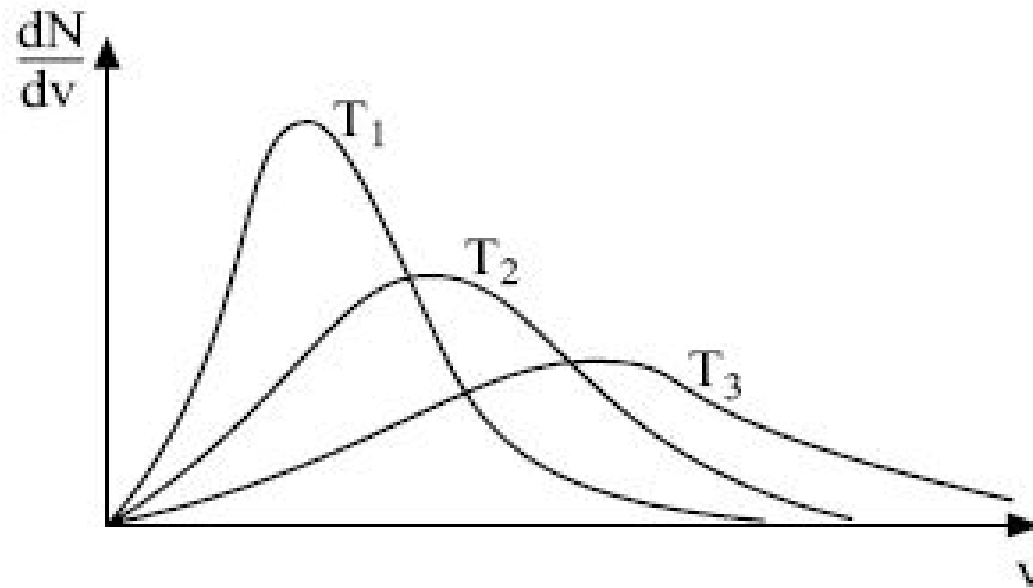
- 2) **z materii o danej masie i ustalonym składzie chemicznym można zbudować tylko jedną trwałą gwiazdę**

NIE ZAWSZE JEST SPEŁNIONE

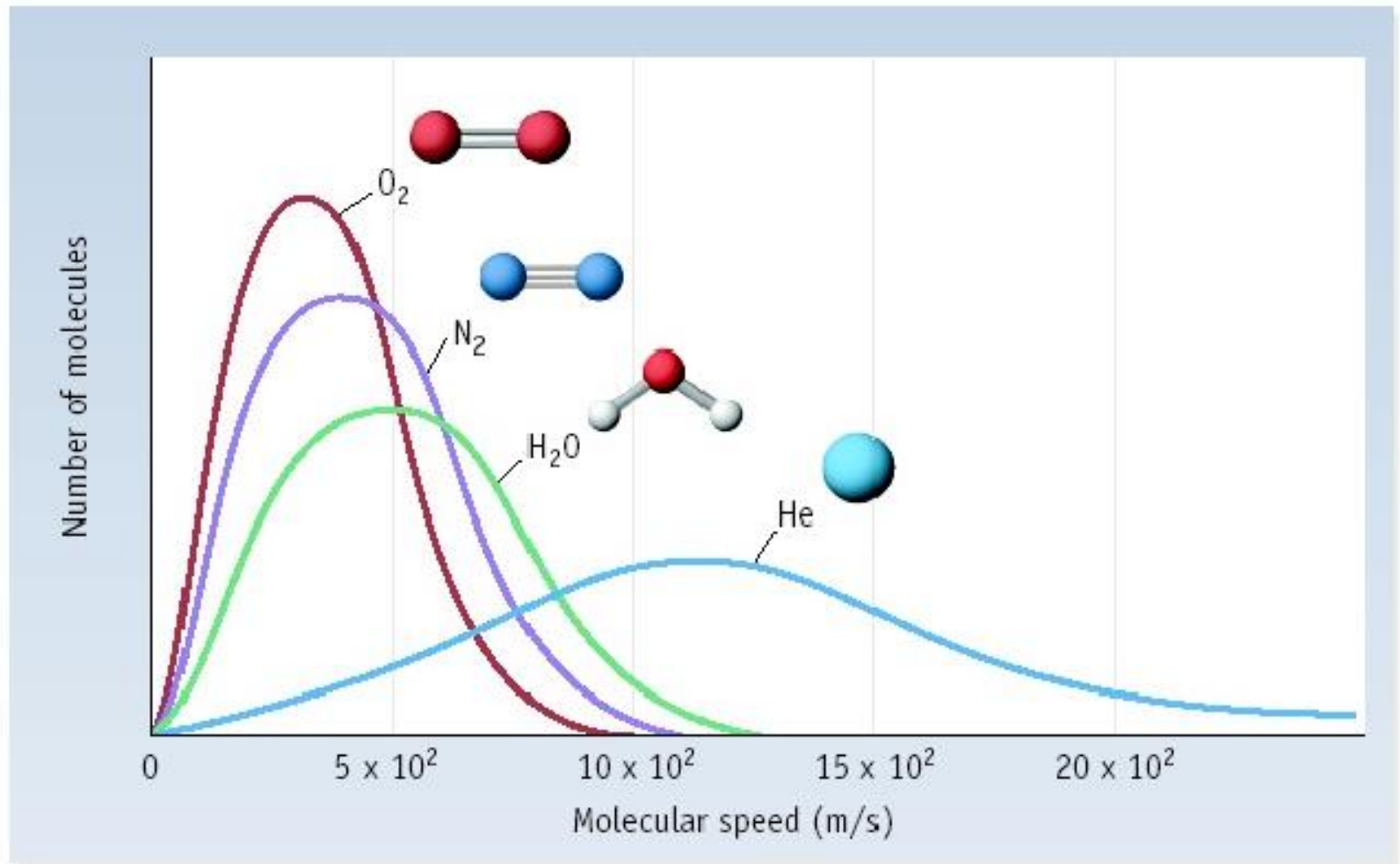
Porównanie statystyk



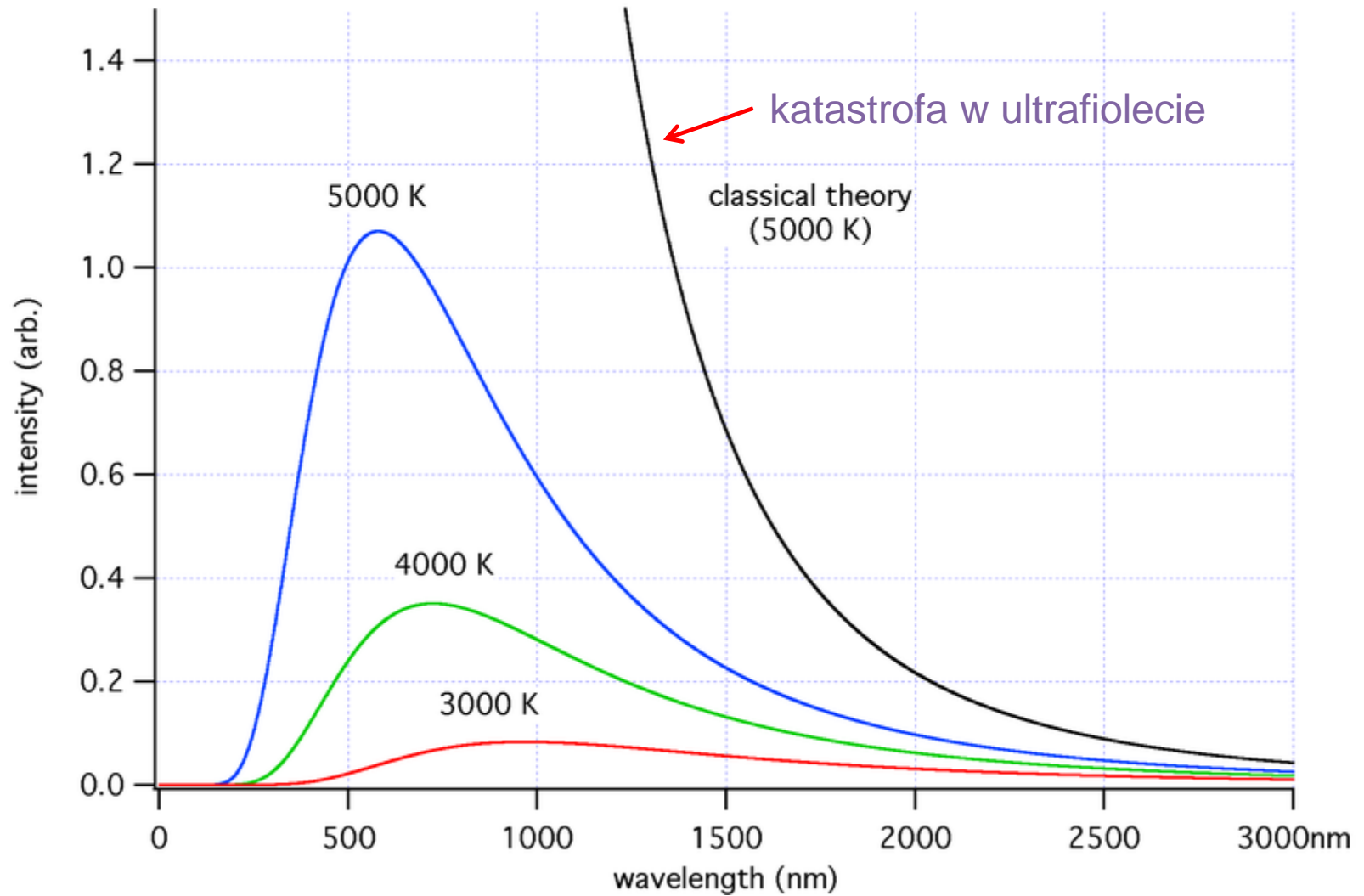
Rozkład Maxwella dla temperatur $T_1 < T_2 < T_3$

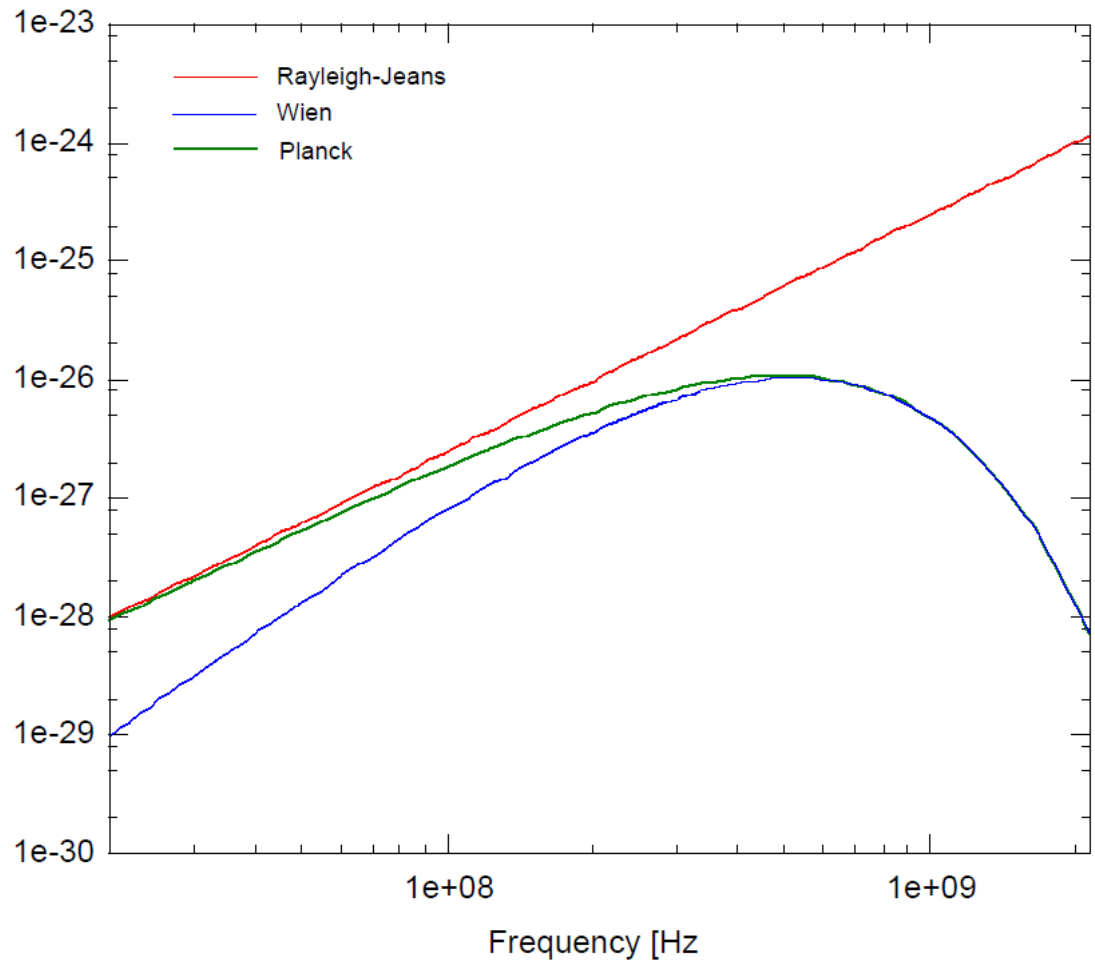


Rozkład Maxwella dla różnych cząstek o tej samej T



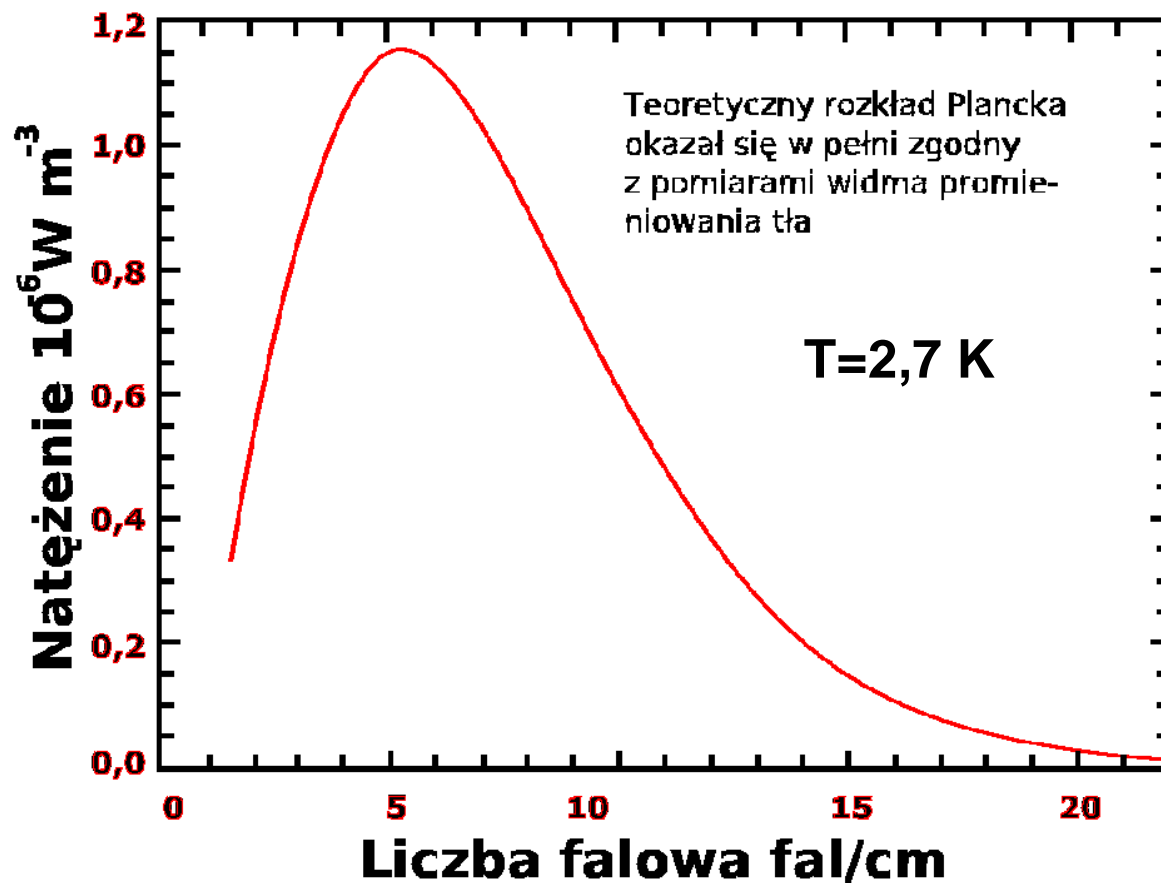
Rozkład Plancka



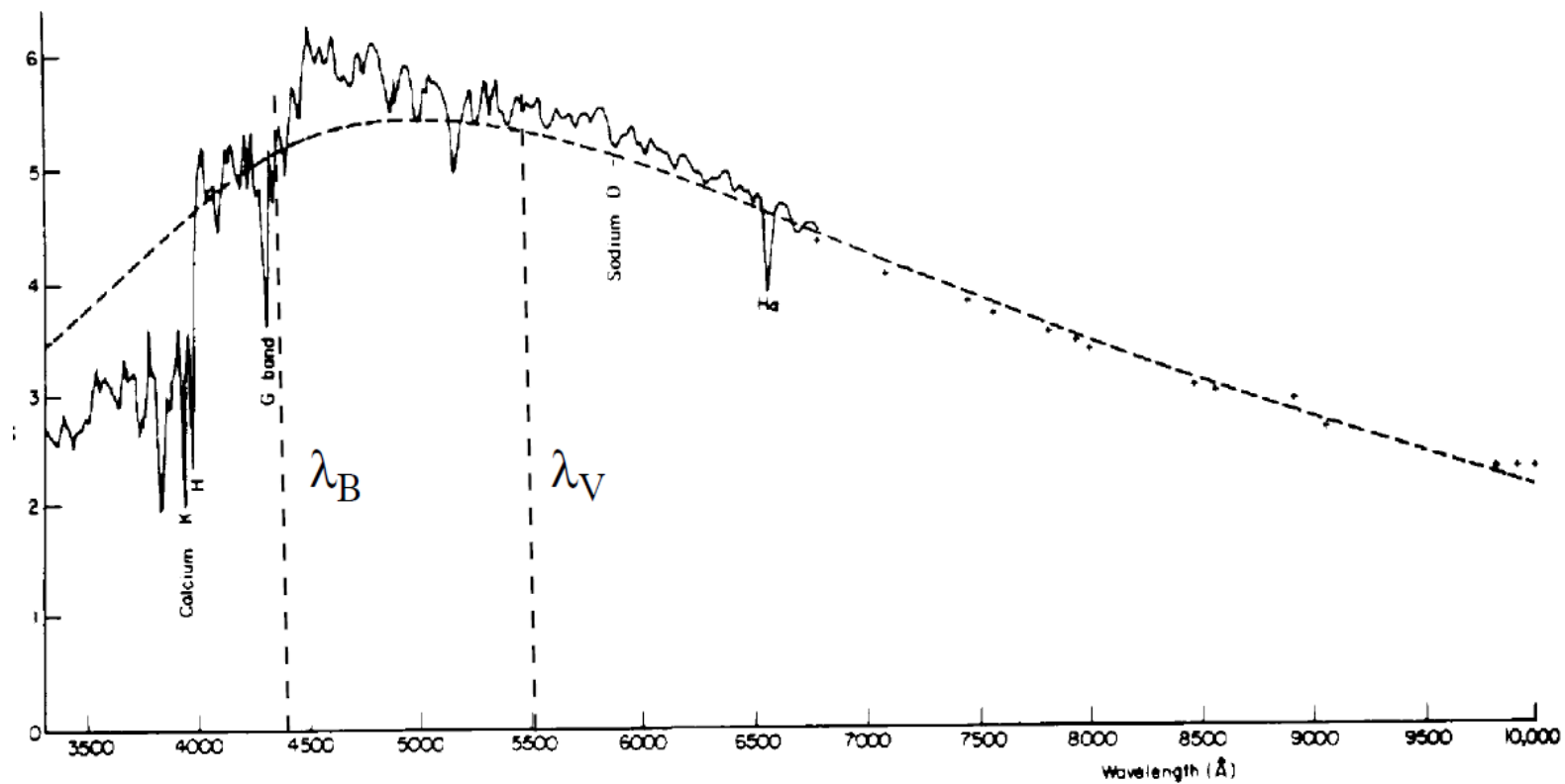


Katastrofa w UV

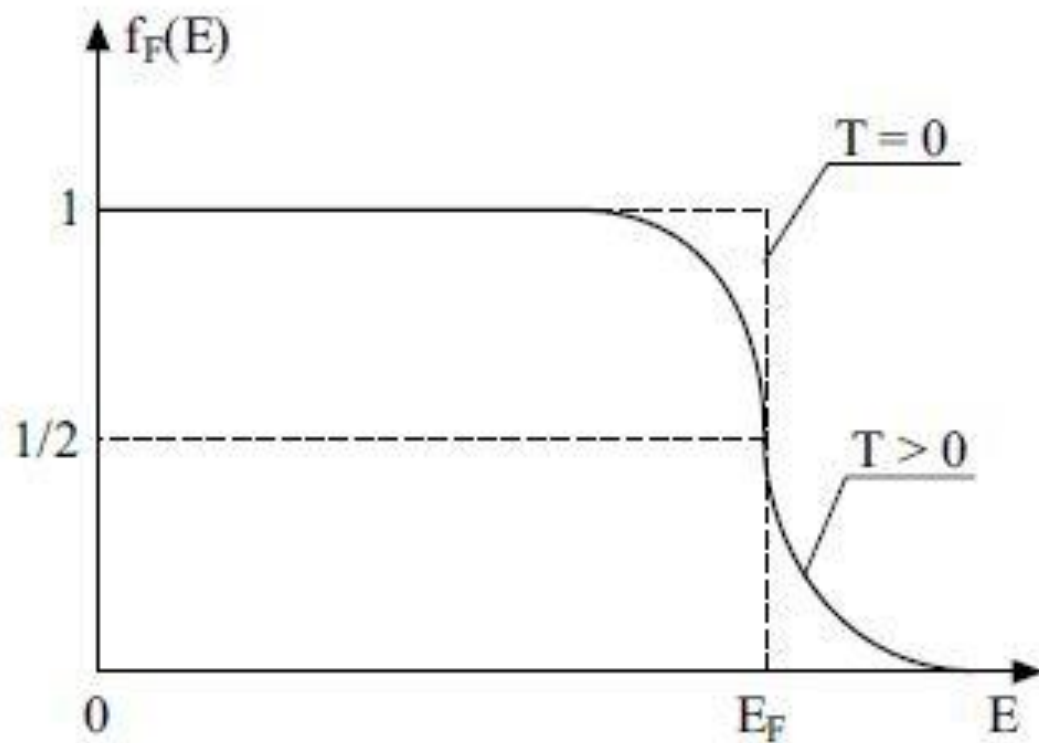
Widmo promieniowania tła uzyskane z satelity COBE



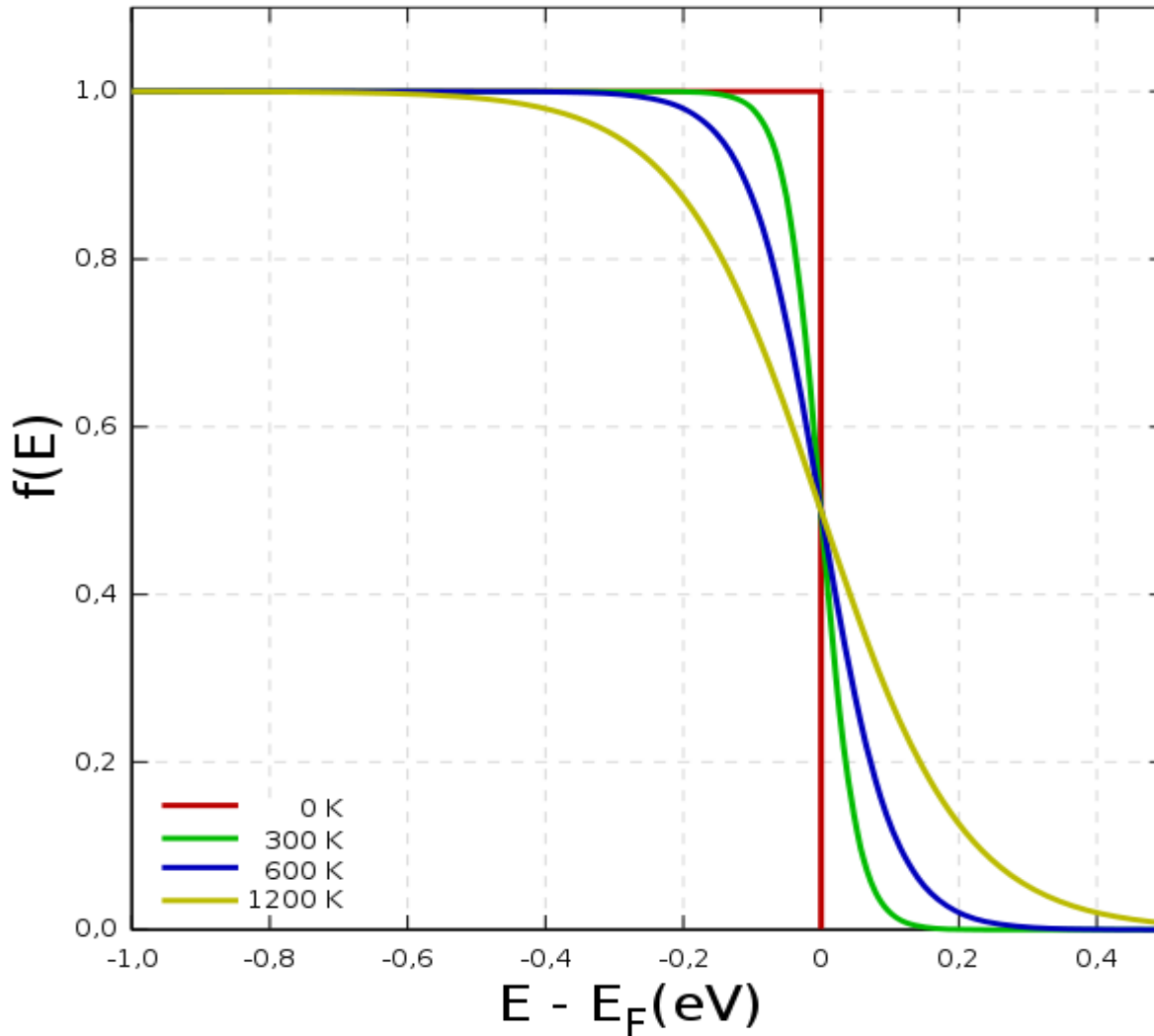
Widmo Słońca w porównaniu z rozkładem dla ciała doskonale czarnego o $T_{\text{eff}}=T_{\text{eff}}(\text{Sun})$



Rozkład Fermiego-Diraca dla $T=0$ K i $T>0$ K



Rozkład Fermiego-Diraca dla różnych temperatur



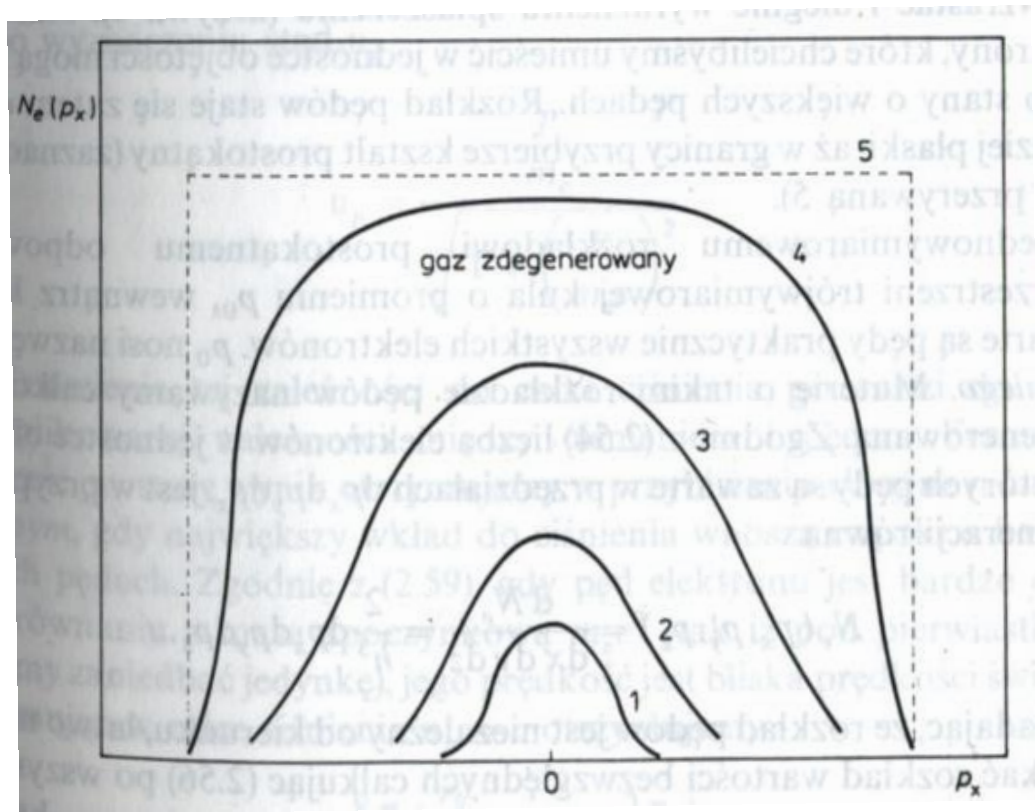
- * Dla dowolnej temperatury prawdopodobieństwo wypełnienia stanu o energii E_F wynosi 0.5 !
- * W $T=0K$ wypełnione są wszystkie stany o energiach niższych od E_F

Przypadki graniczne rozkładu Fermiego-Diraca

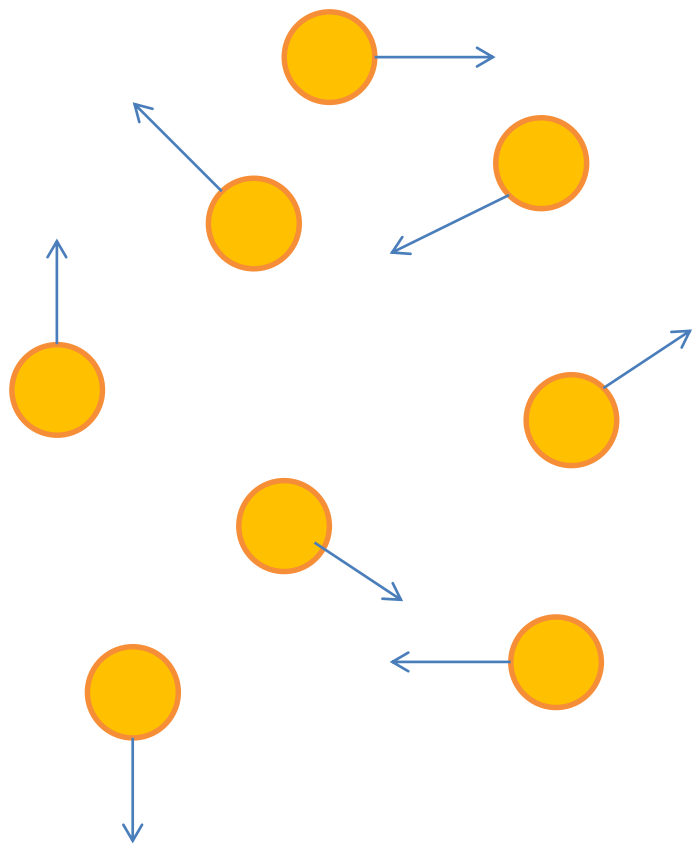
$$\left. \begin{array}{l} E < E_f \\ \frac{E - E_f}{kT} \rightarrow -\infty \end{array} \right\} f(E) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} E > E_f \\ \frac{E - E_f}{kT} \rightarrow +\infty \end{array} \right\} f(E) = 0$$

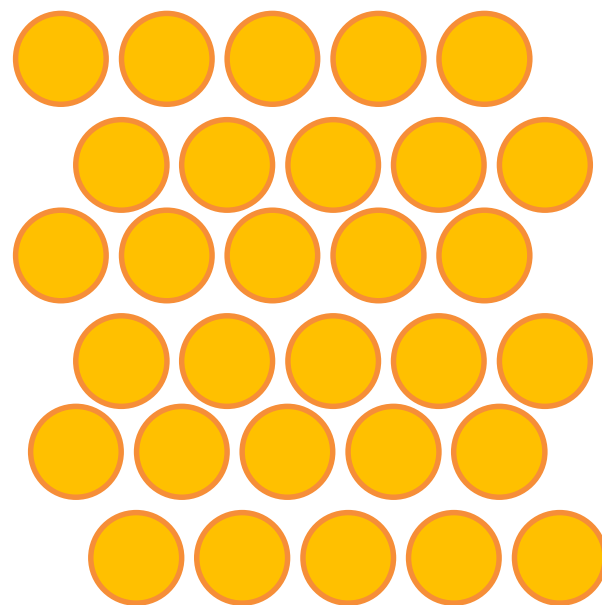
$$\left. \begin{array}{l} E = E_f \\ \frac{E - E_f}{kT} = 0 \end{array} \right\} f(E) = \frac{1}{2}$$



Gaz „normalny”



Gaz zdegenerowany



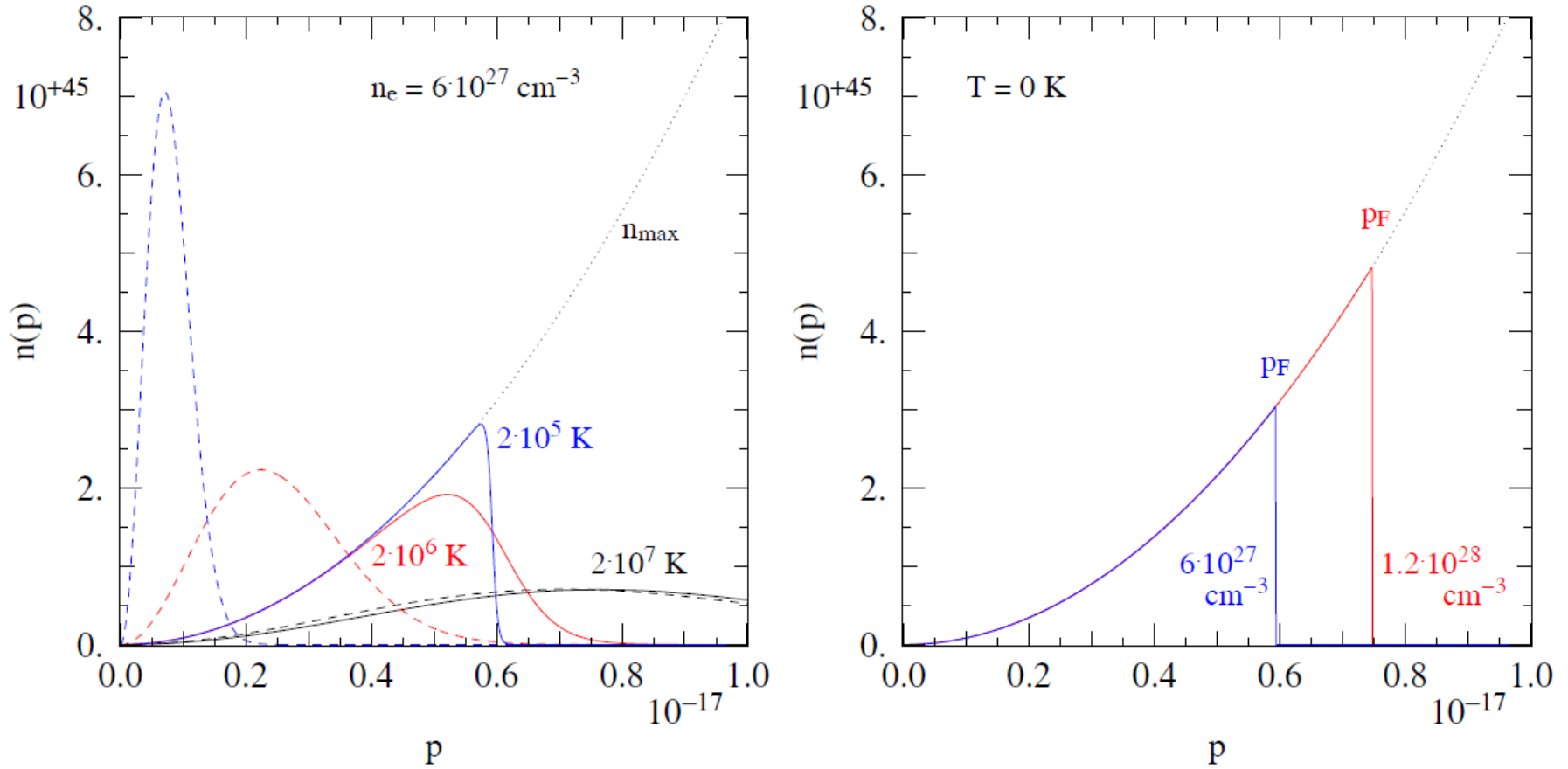
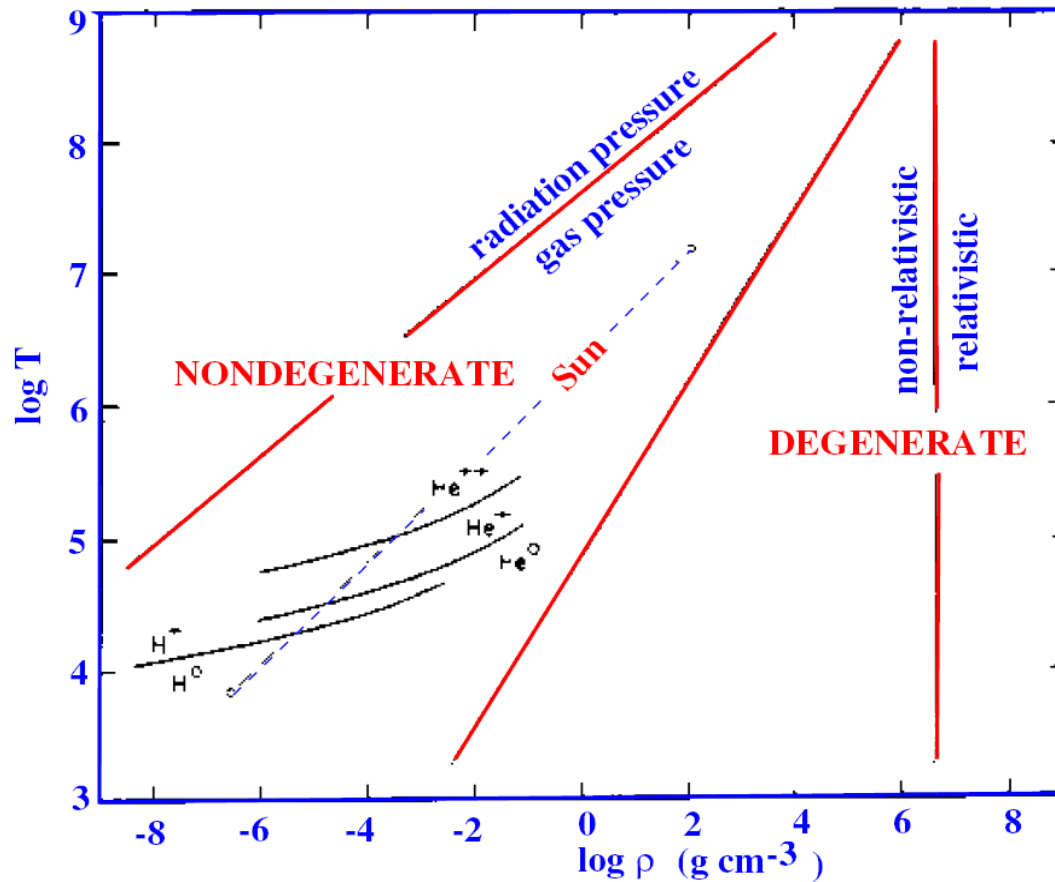
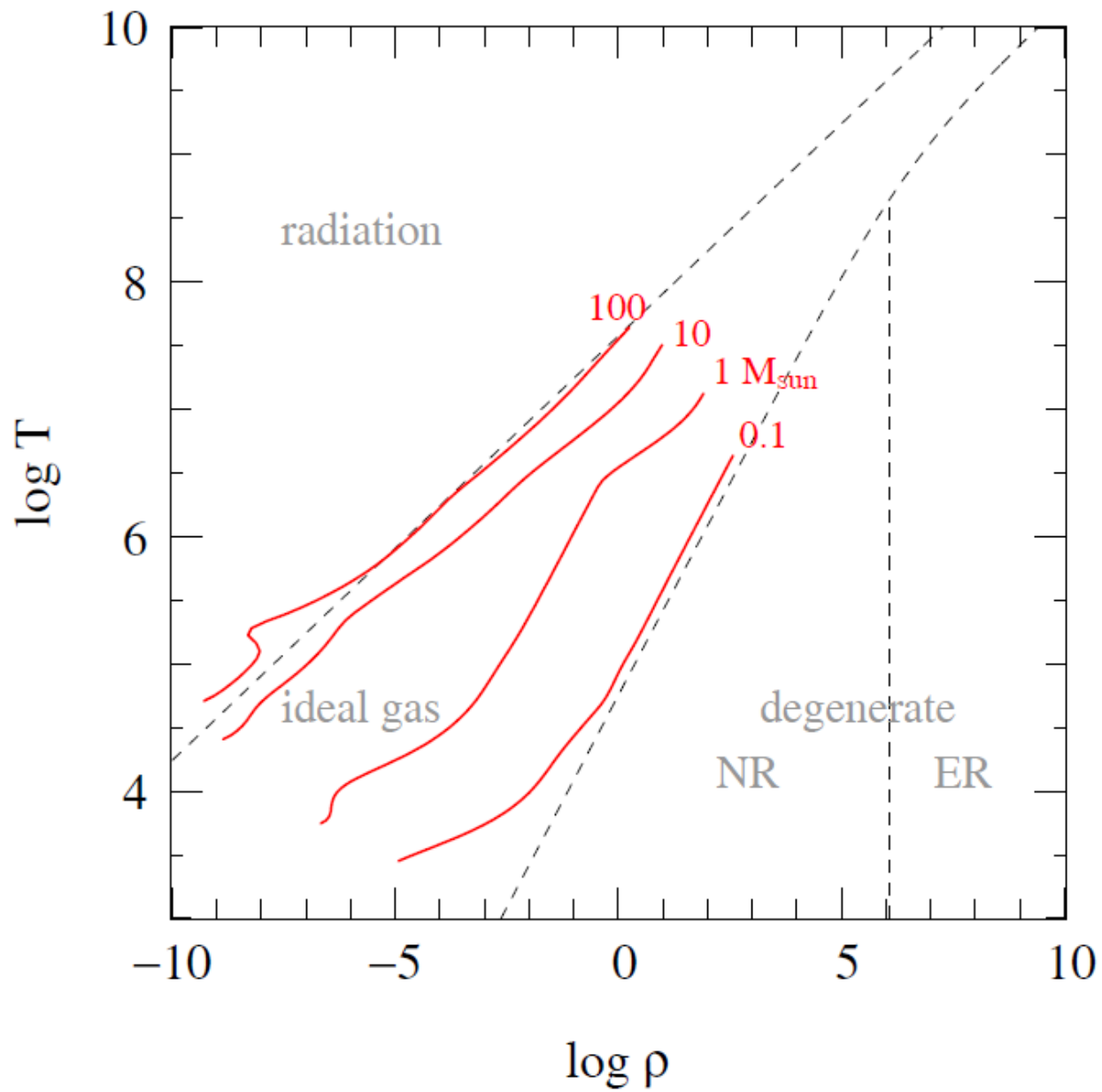


Figure 3.2. (left panel) Electron momentum distributions $n(p)$ for an electron density of $n_e = 6 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$ (corresponding to $\rho = 2 \times 10^4 \text{ g/cm}^{-3}$ if $\mu_e = 2$), and for three different temperatures: $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$ (black lines), $2 \times 10^6 \text{ K}$ (red lines) and $2 \times 10^5 \text{ K}$ (blue lines). The actual distributions, governed by quantum mechanics, are shown as solid lines while the Maxwell-Boltzmann distributions for the same n_e and T values are shown as dashed lines. The dotted line n_{max} is the maximum possible number distribution if all quantum states with momentum p are occupied. (right panel) Distributions in the limit $T = 0$, when all lowest available momenta are fully occupied. The blue line is for the same density as in the left panel, while the red line is for a density two times as high.

N. Langer

Równanie stanu





nieprzezroczystość materii, κ_ν

średnia droga swobodna dla fotonu o $E=h\nu$

$$\bar{l} = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}$$

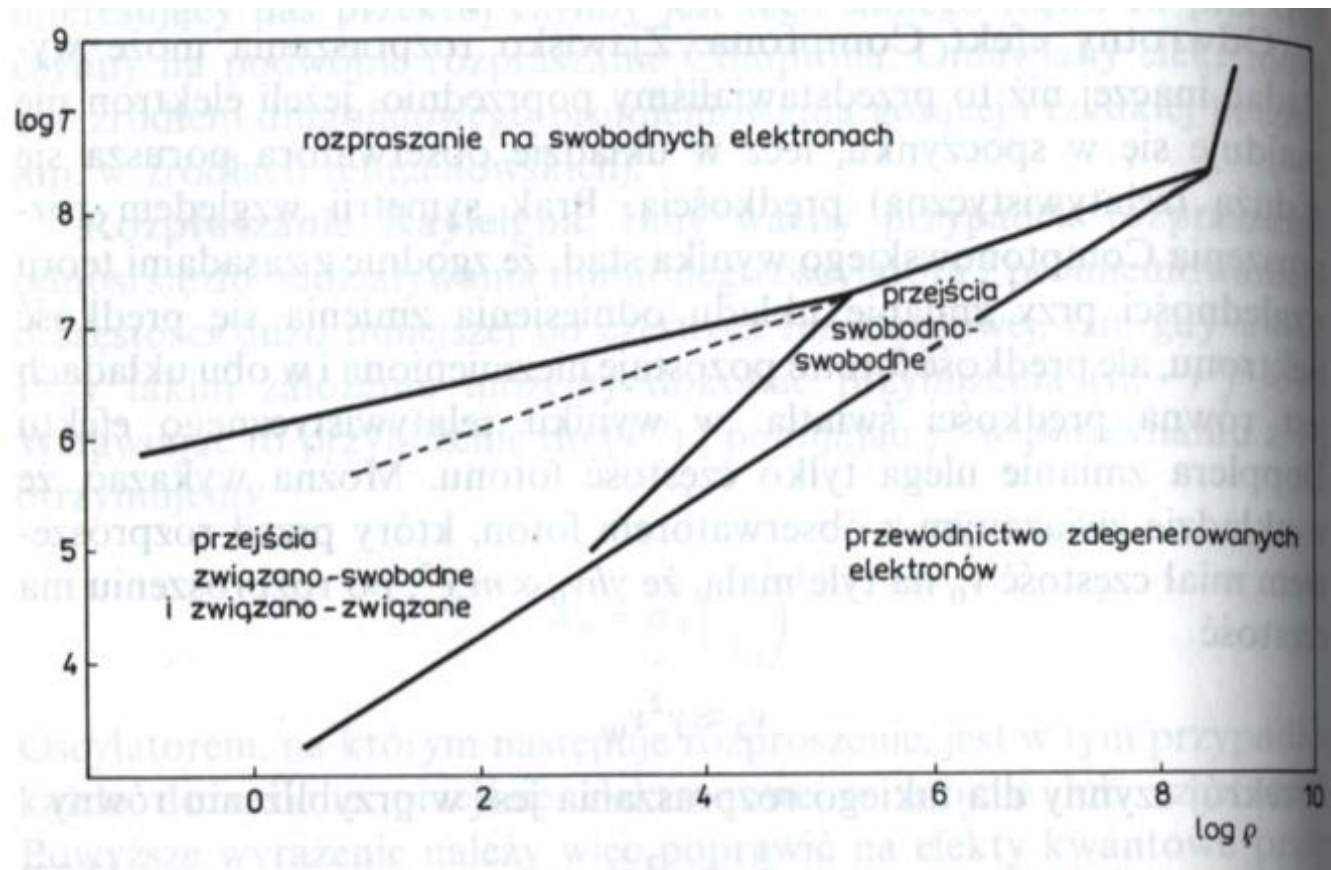
$$\kappa_\nu \rho = \sigma_\nu N$$

$$\kappa_\nu = \sigma_\nu N / \rho \quad [\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]$$

nieprzezroczystość materii, κ , zależy od

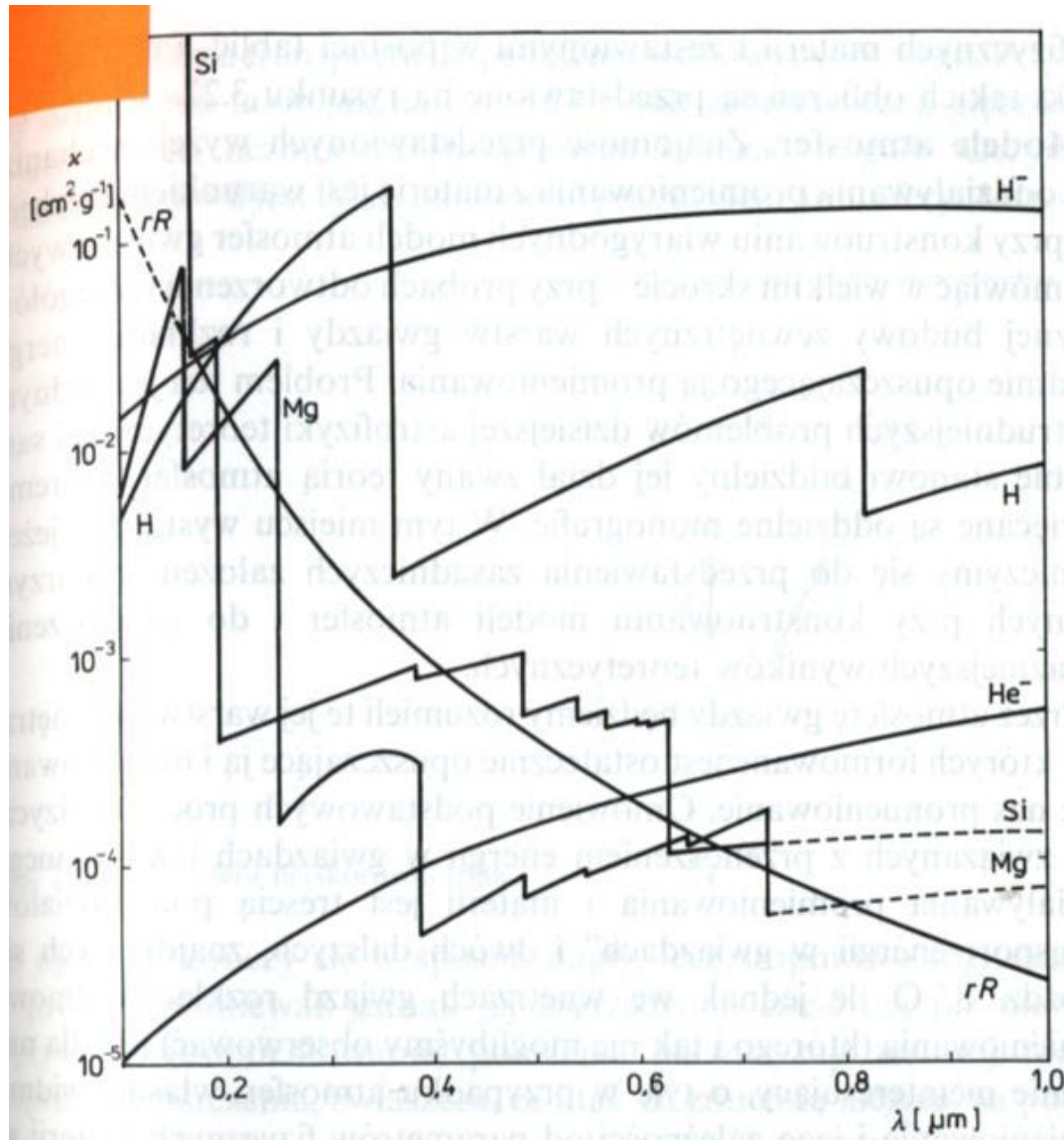
- ◆ **temperatury**
- ◆ **gęstości**
- ◆ **składu chemicznego**

nieprzezroczystość determinuje transport energii



$$K_v = K_{v,bb} + K_{v,bf} + K_{v,ff} + K_{v,es}$$

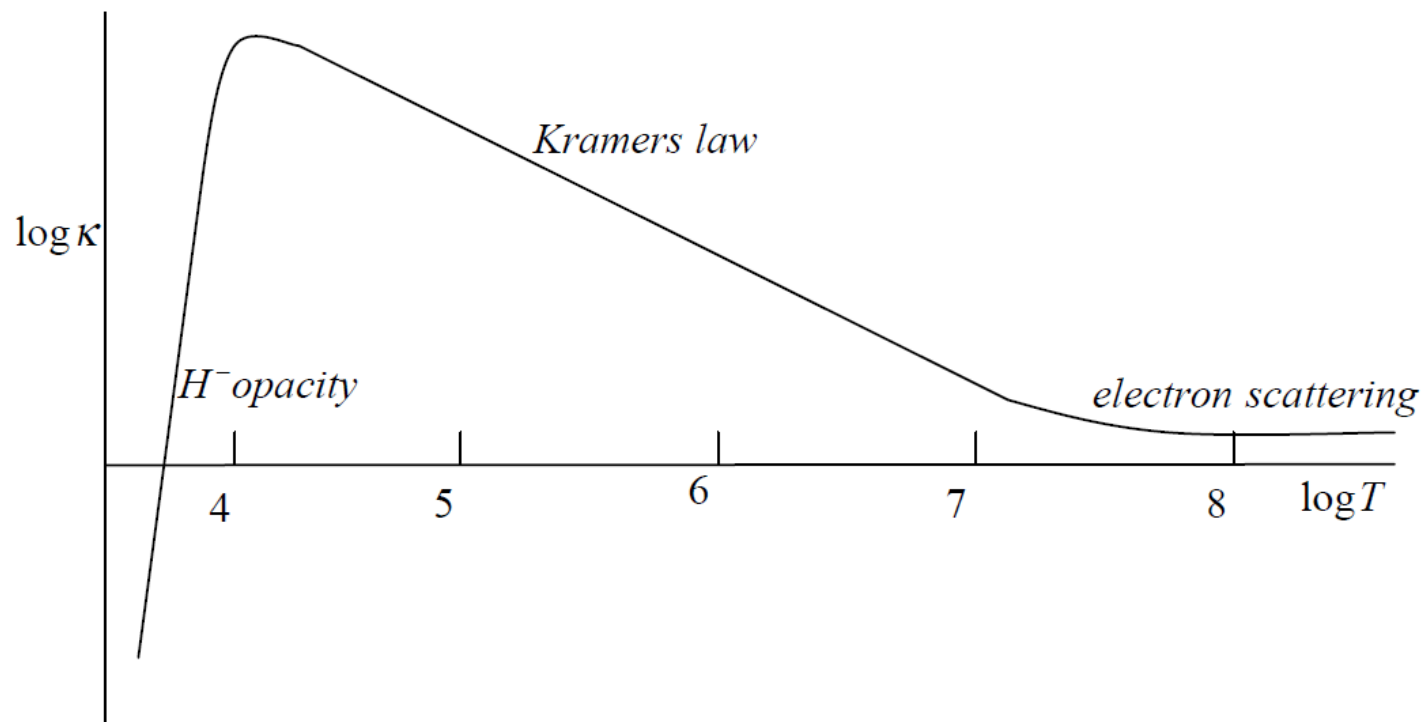
ZW. -ZW. ZW. -SW. SW. -SW. rozp.



šrednia Rosselanda

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu}$$

Ješli $\kappa \propto \nu^{-n}$ to $\bar{\kappa} \propto T^{-n}$



Wysokie temperatury

$$\kappa = 0.02(1+X) \text{ (rozp. Thomsona)}$$

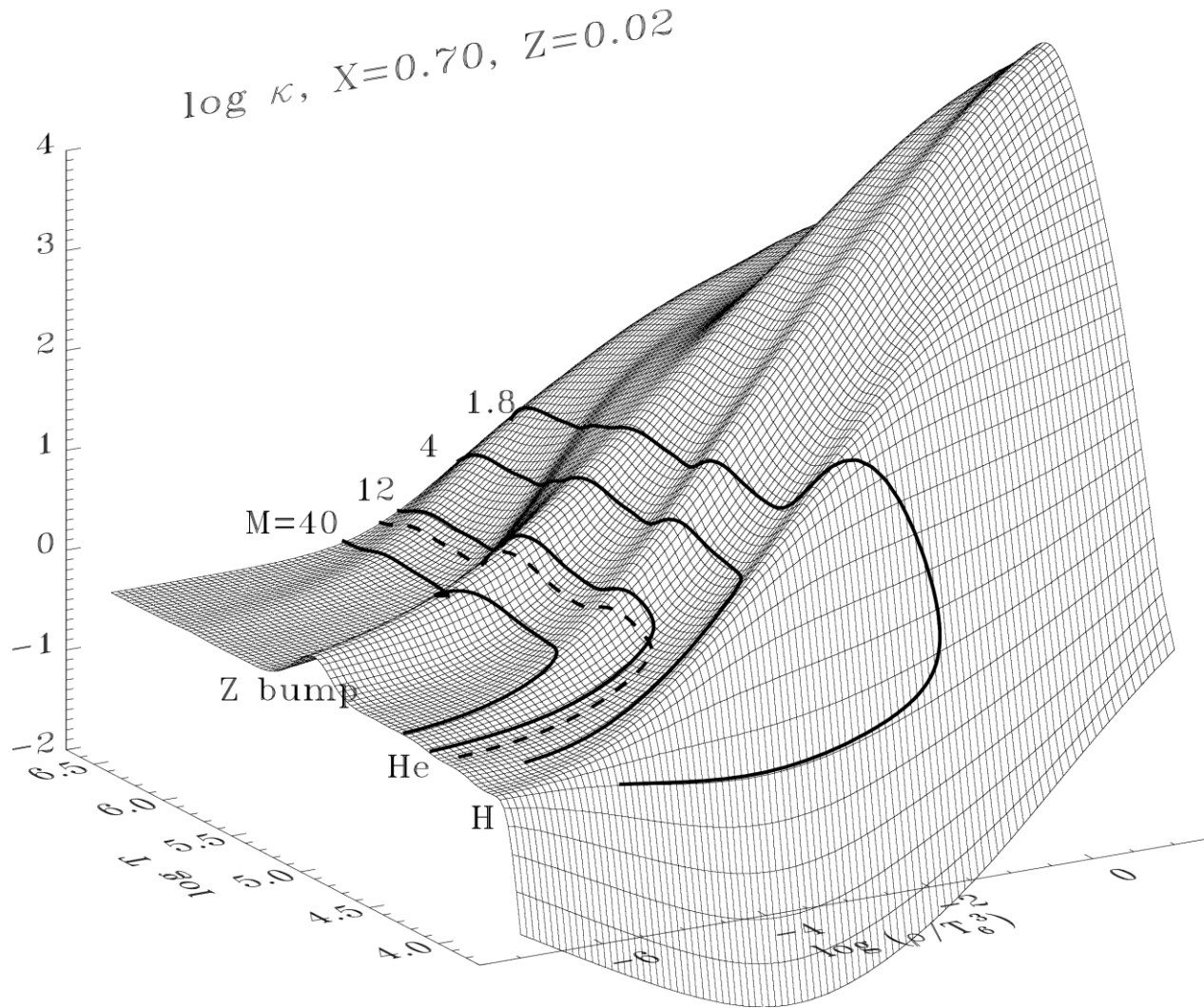
Pośrednie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho T^{-3.5} \text{ (wzór Kramersa)}$$

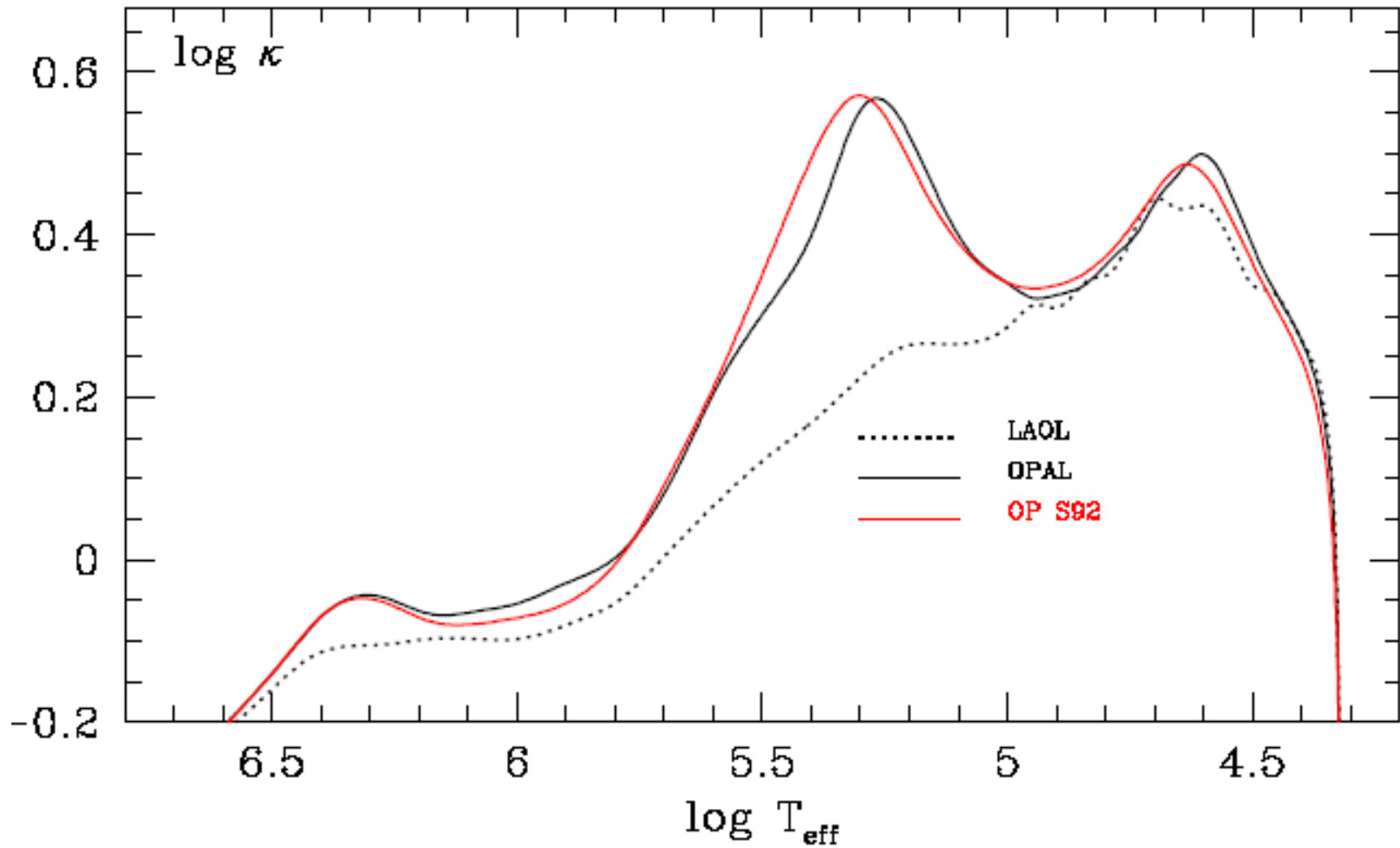
bardzo niskie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^4$$

Nieprzezroczystość, $\kappa(\text{OPAL})$, w zależności od $\log T$ i $\log \rho/T_6^3$ ($T_6 = T/10^6$)



„Opacity” wewnątrz modelu $M=12 M_{\odot}$, $X=0.70$, $Z=0.02$:
OP (Seaton et al.) vs. OPAL (Livermore) vs. LAOL (Los Alamos)



OPAL 1996

Iglesias & Rogers

<http://opalopacity.llnl.gov/>

<http://adg.llnl.gov/Research/OPAL/opal.html>

OP 2005

Seaton i in.

<http://opacities.osc.edu/>

Low Temperature Rosseland Opacities

Aleksander & Ferguson 2005

<http://webs.wichita.edu/physics/opacity/>

OPLIB (nowe Los Alamos)

Colgan i in. 2013, 2015

REAKCJE JĄDROWE

we wnętrzach gwiazd



Energia wiązania na jeden nukleon

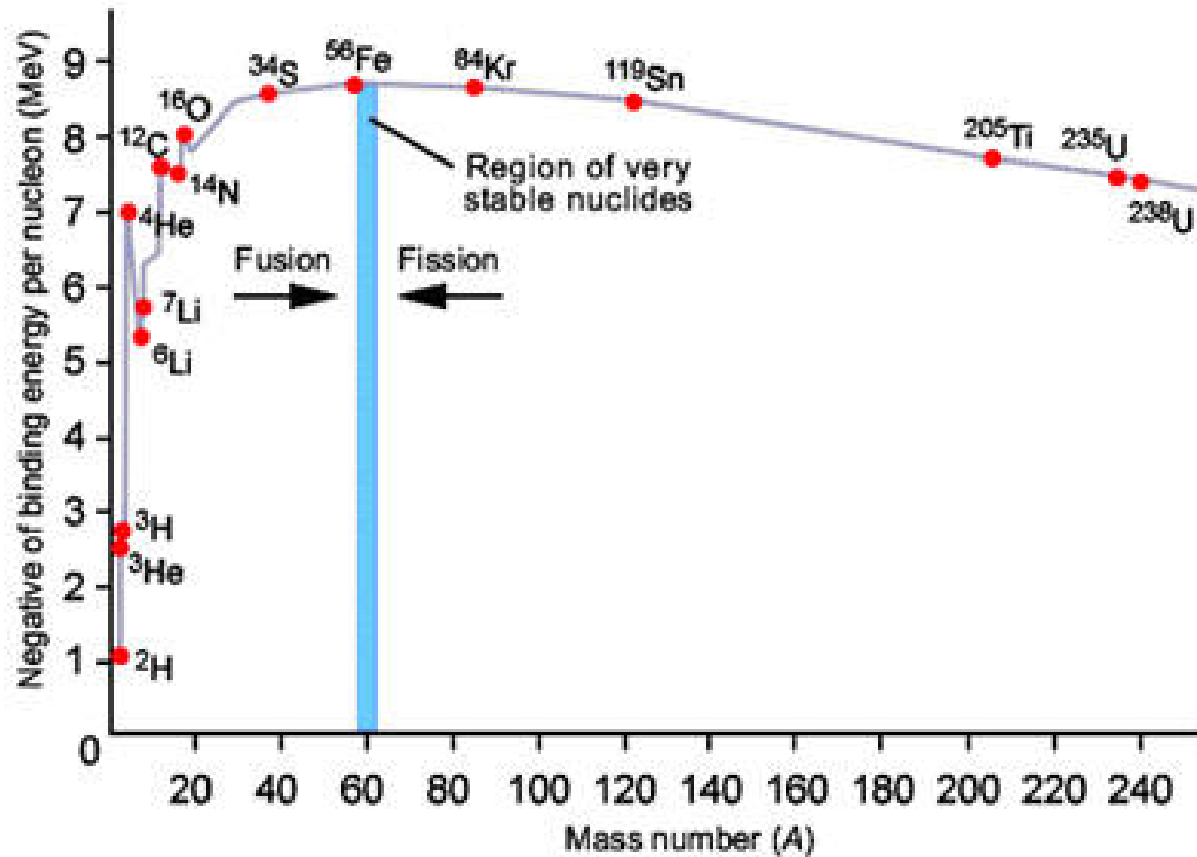
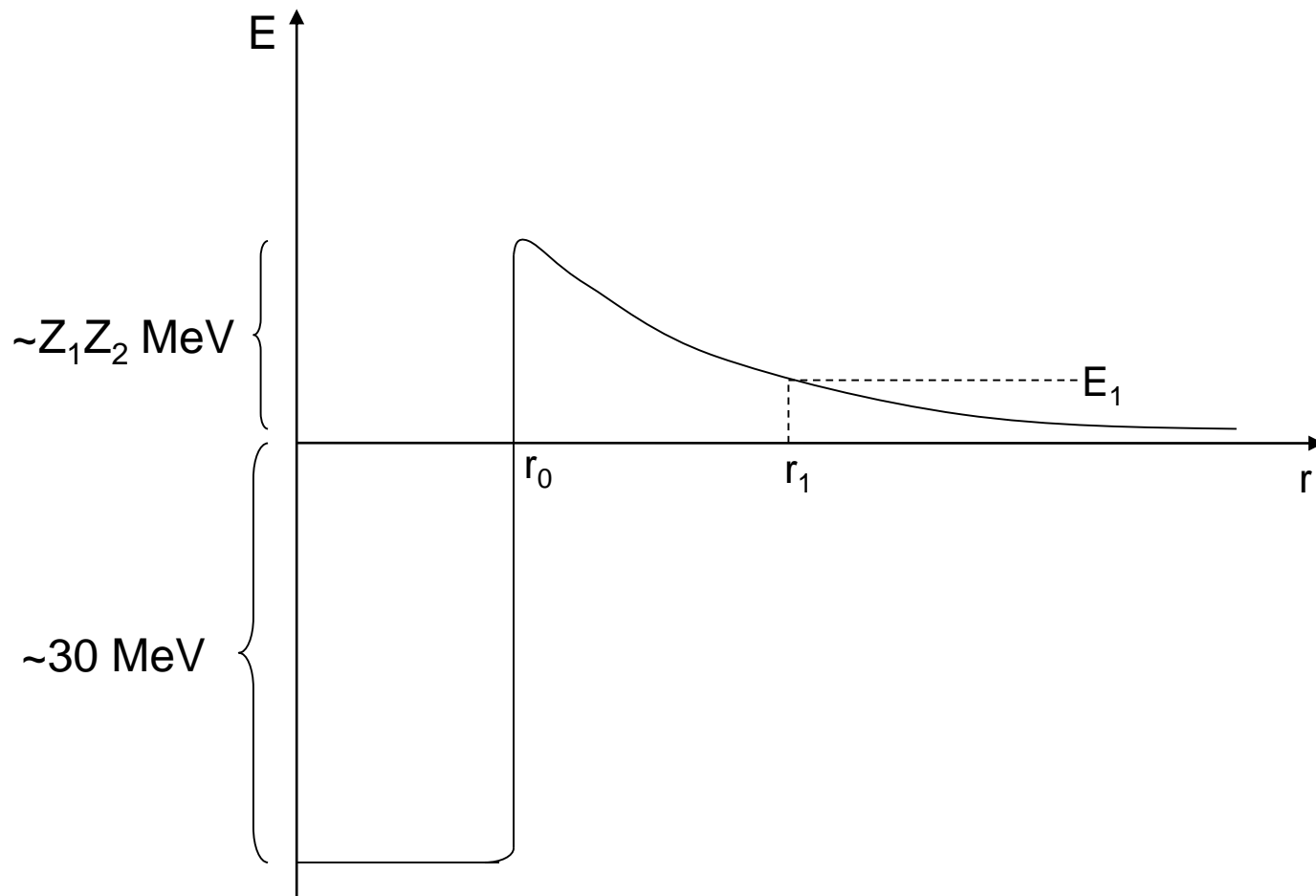


Tabela 8.1. Wartości nadwyżek masy ΔM w MeV dla kilku pierwiastków ważnych z punktu widzenia reakcji jądrowych przebiegających w gwiazdach

Z	jądro	A	ΔM	Z	jądro	A	ΔM	Z	jądro	A	ΔM
0	n	1	8,071	5	B	9	12,418	9	F	16	10,904
1	H	1	7,289			10	12,052			17	1,951
	D	2	13,136			11	8,668			18	0,872
	T	3	14,950			12	13,370			19	-1,486
	H	4	28,220			13	16,562			20	-0,012
2	He	5	31,090	6	C	9	28,990	10	Ne	21	-0,046
		3	14,931			10	15,658			18	5,319
		4	2,425			11	10,648			19	1,752
		5	11,454			12	0			20	-7,042
		6	17,598			13	3,125			21	-5,730
		7	26,030			14	3,020			22	-8,025
		8	32,000			15	9,873			23	-5,148
3	Li	5	11,679	7	N	12	17,364			24	-5,949
		6	14,088			13	5,345	11	Na	20	8,280
		7	14,907			14	2,864			21	-2,185
		8	20,946			15	0,100			22	-5,182
		9	24,965			16	5,685			23	-9,528
4	Be	6	18,376			17	7,871				
		7	15,769	8	O	14	8,008			25	-9,356
		8	4,944			15	2,860			26	-7,690
		9	11,351			16	-4,737	12	Mg	22	-0,140
		10	12,607			17	-0,808			23	-5,472
11	20,181	18	-0,782			24	13,033				
5	B	7	27,990			19	3,333			25	-13,191
		8	22,923			20	3,799			26	-16,214



Tempo reakcji jądrowych

$$\tilde{r}_{ij} = n_i n_j v \sigma, \quad [\text{s}^{-1} \text{cm}^{-3}]$$

$$\sigma(E) \equiv \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right)$$

$$\sigma(E) \equiv \frac{S(E)}{E} \exp\left(-bE^{-1/2}\right),$$

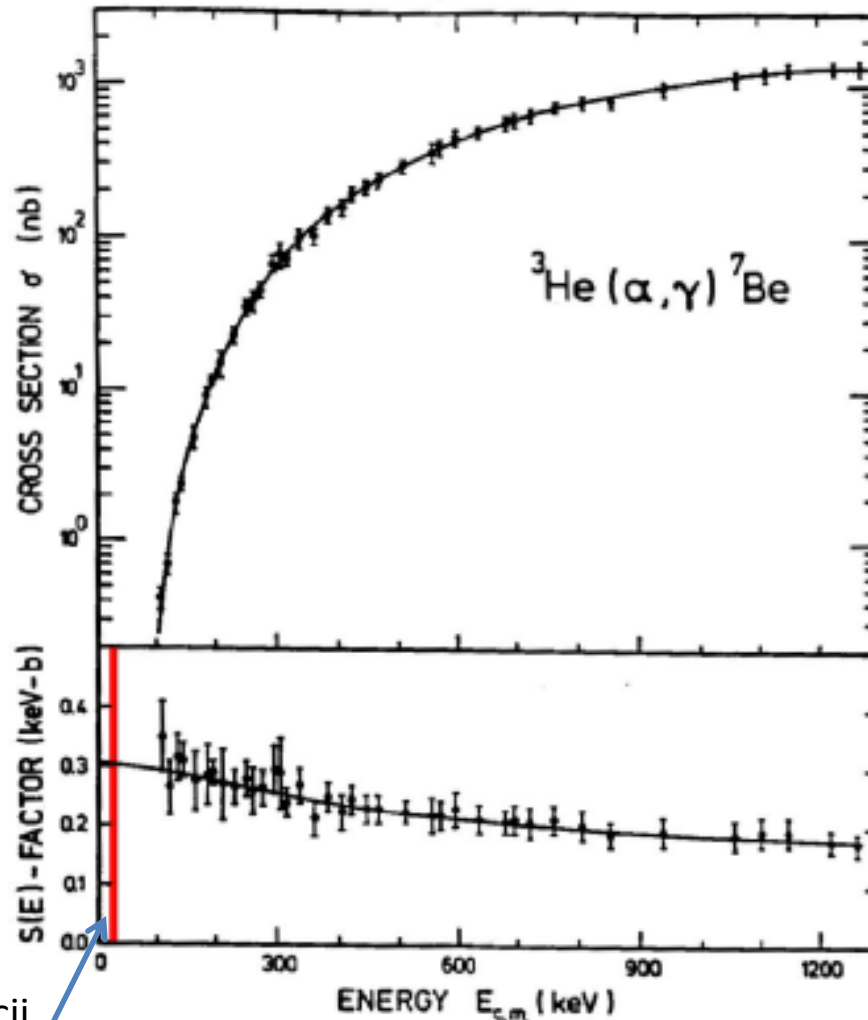
$$b = 31.291 Z_1 Z_2 \mathcal{A}^{1/2} \text{ keV}^{1/2}.$$

S(E) – (astrofizyczny) czynnik S

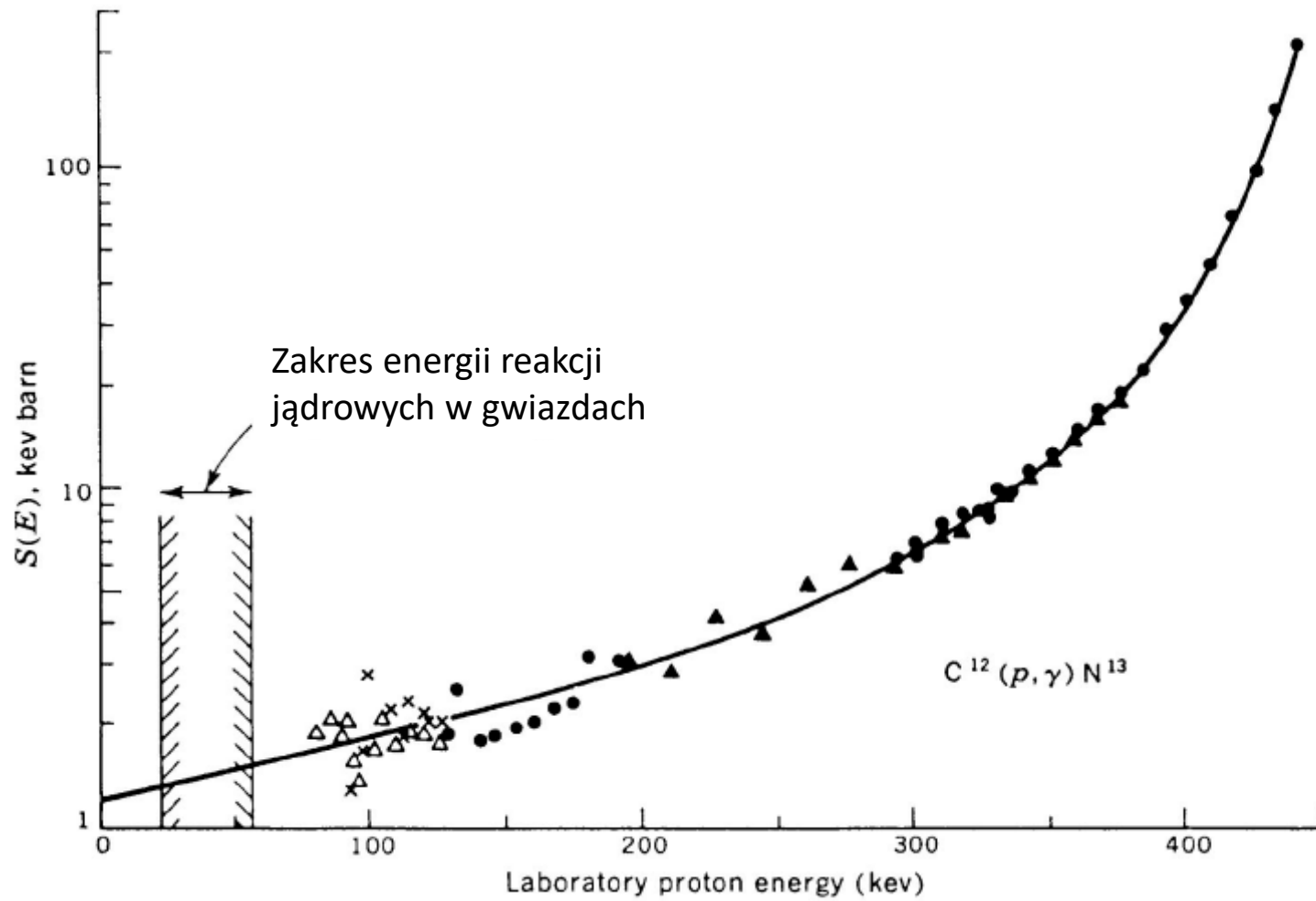
S(E) – (astrofizyczny) czynnik S

- wolnozmienna funkcji E (σ - szybkozmienna)
- zawiera informację w własnościach jądrowych
- można ekstrapolować z pomiarów przy dużych E

Zależność przekroju czynnego i czynnika $S(E)$ od energii dla reakcji ${}^3\text{He}+{}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be}+\gamma$



energie reakcji
jądrowych w gwiazdach

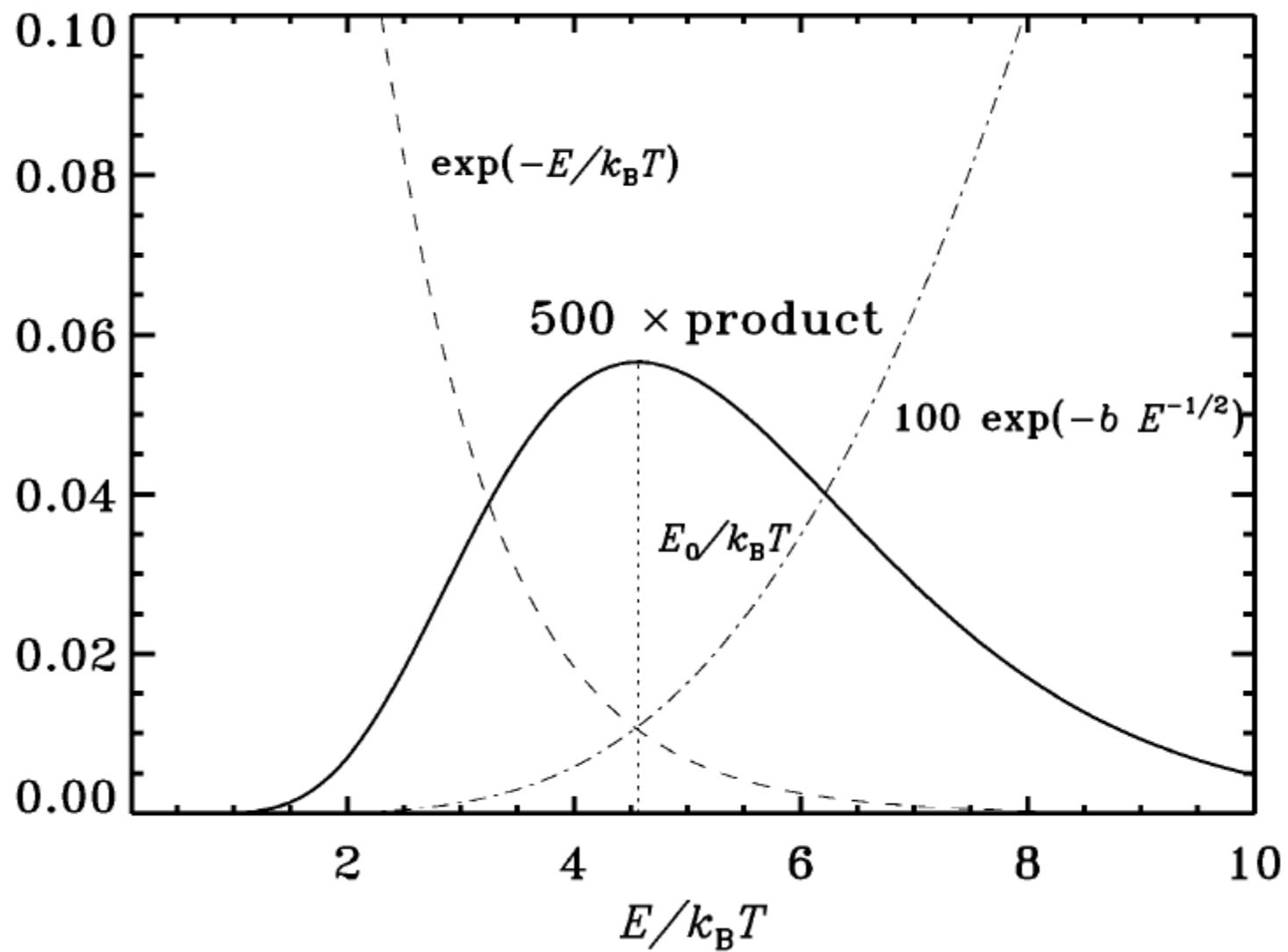


Tempo reakcji jądrowych

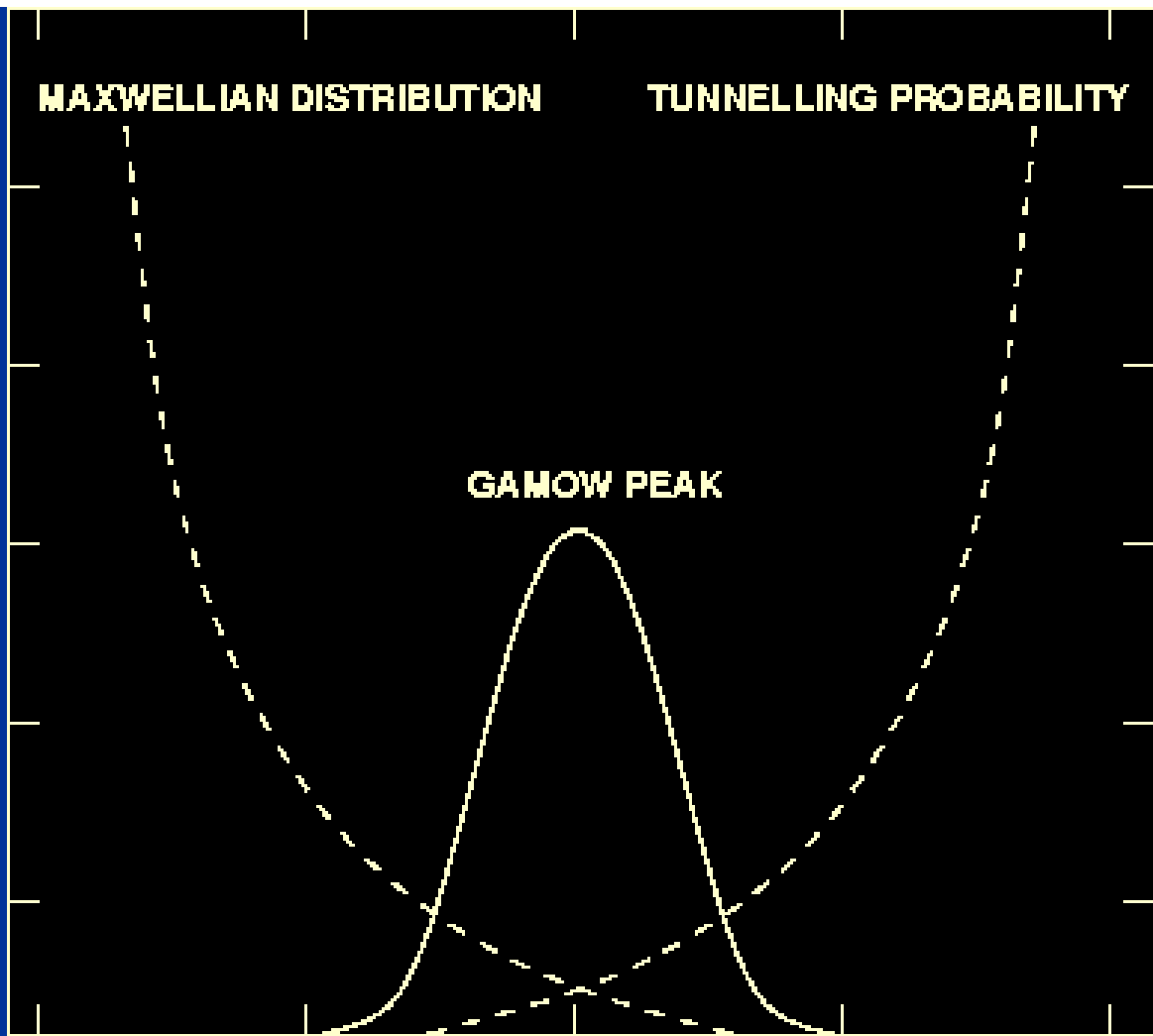
$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{m\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp \left(-\frac{E}{k_B T} - \frac{b}{E^{1/2}} \right) dE .$$

$\exp(-bE^{-1/2})$ **wzrost $\langle \sigma v \rangle$ z E (efekt tunelowy)**

$\exp(-E/k_B T)$ **spadek $\langle \sigma v \rangle$ z E (rozkład Maxwella)**



FUSION PROBABILITY



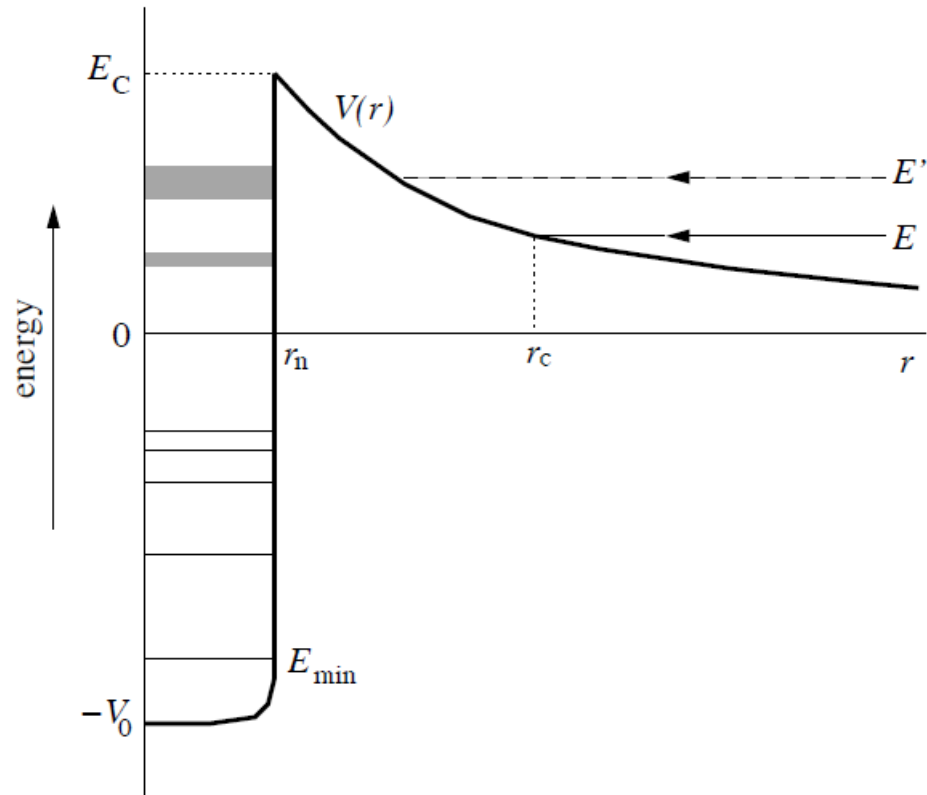
MAXWELLIAN DISTRIBUTION

TUNNELLING PROBABILITY

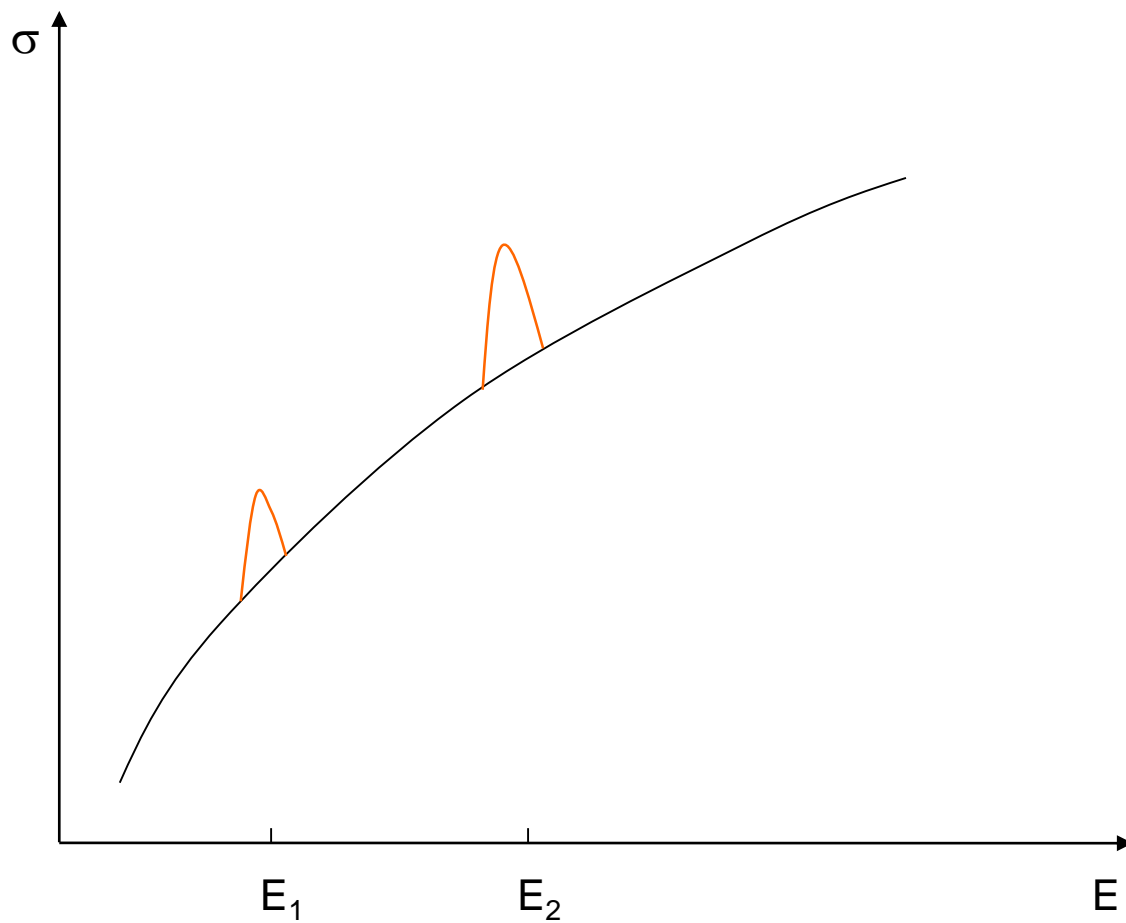
GAMOW PEAK

ENERGY

Reakcje rezonansowe



Rezonans dla E_1 i E_2



Bazy danych o reakcjach jądrowych

NACRE

<http://pntpm.ulb.ac.be/Nacre>

JINA

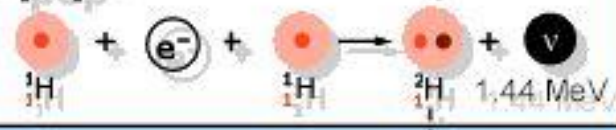
**dane dla ponad 76000 reakcji
ponad 4500 izotopów**

1 **reakcja p-p**

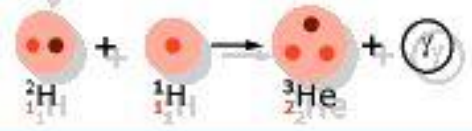


Lecz raz na 400 razy:

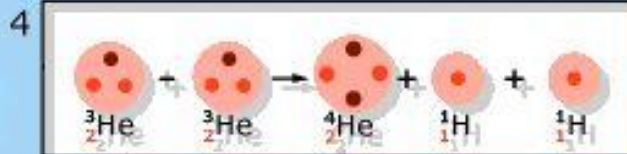
2 **reakcja "pep"**



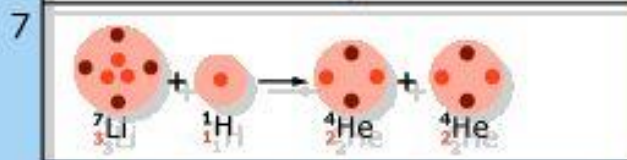
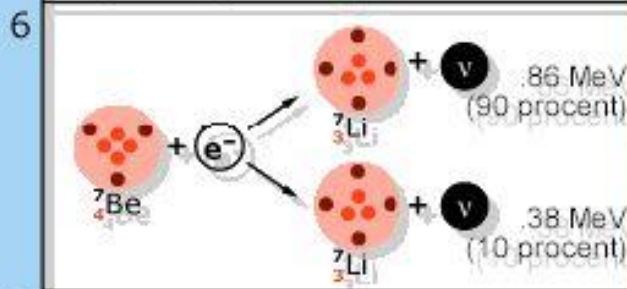
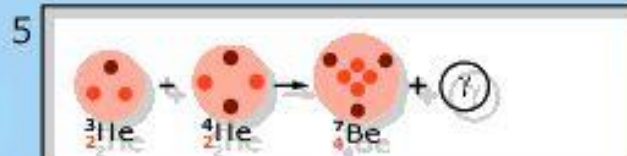
3



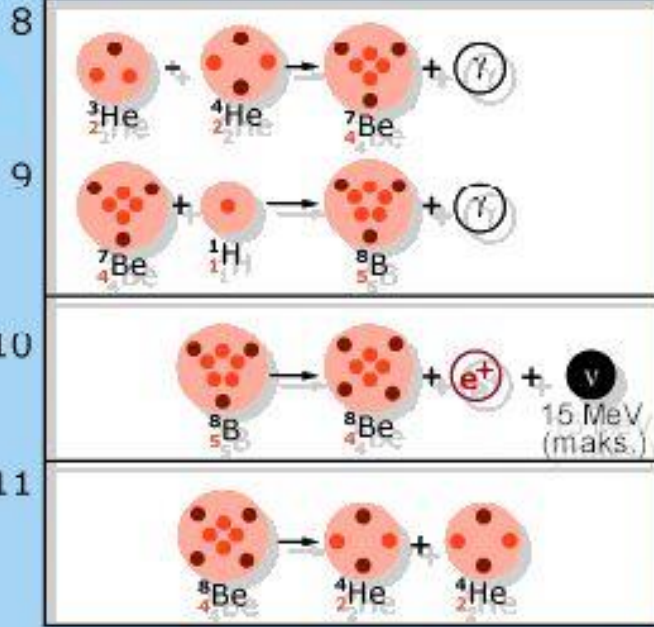
gałąź 1
(85%)



gałąź 2
(15%)



galaz 3
(0,01%)



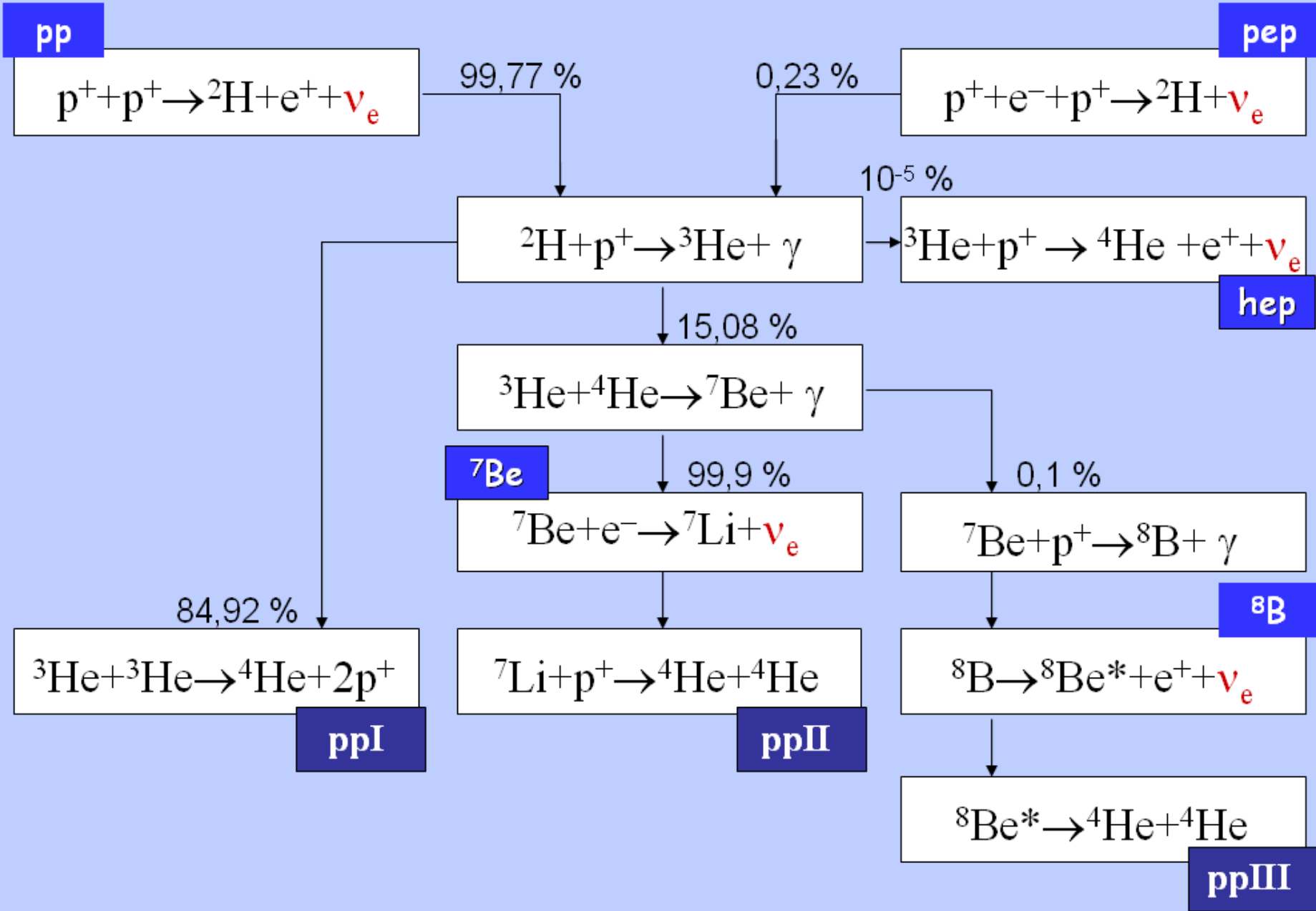


Tabela 4.1. Reakcje jądrowe w cyklach pp

	Reakcja	Q' [MeV]	Q_ν [MeV]	Oznaczenie
ppI	$p(p, e^+ \nu) d$	1,192	0,250	λ_{pp}
	$d(p, \gamma) {}^3\text{He}$	5,494		λ_{pd}
	${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p)\alpha$	12,860		λ_{33}
ppII	${}^3\text{He}(\alpha, \gamma) {}^7\text{Be}$	1,586	0,813	λ_{34}
	${}^7\text{Be}(e^-, \nu) {}^7\text{Li}$	0,049		λ_{e7}
	${}^7\text{Li}(p, \alpha)\alpha$	17,348		λ'_{17}
ppIII	${}^7\text{Be}(p, \gamma) {}^8\text{B}$	0,137	7,2	λ_{17}
	${}^8\text{B}(e^+, \nu) {}^8\text{Be}^*$	7,9		λ_8
	${}^8\text{Be}^*(\alpha, \alpha)\alpha$	2,995		λ'_8

Cykl CNO

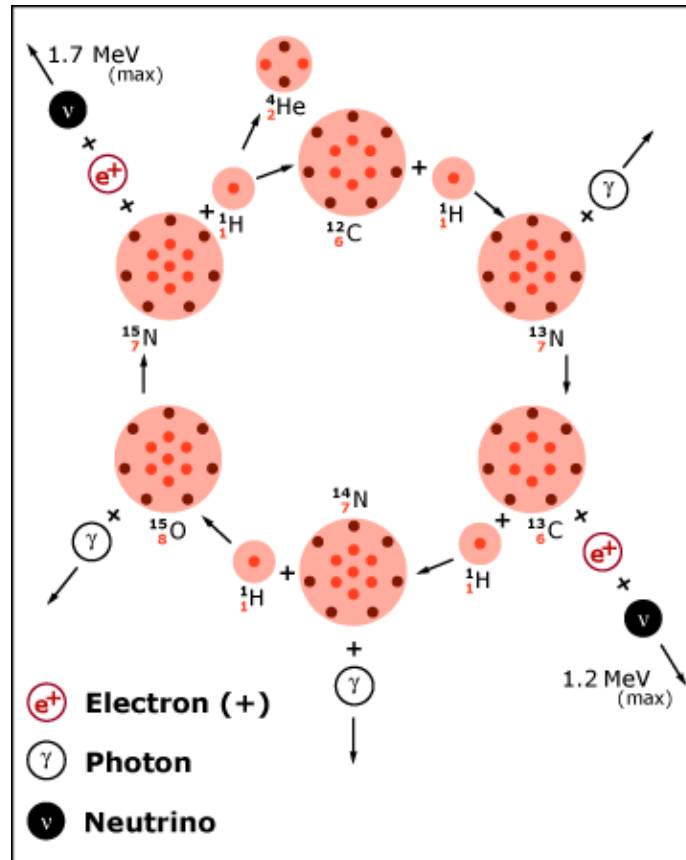
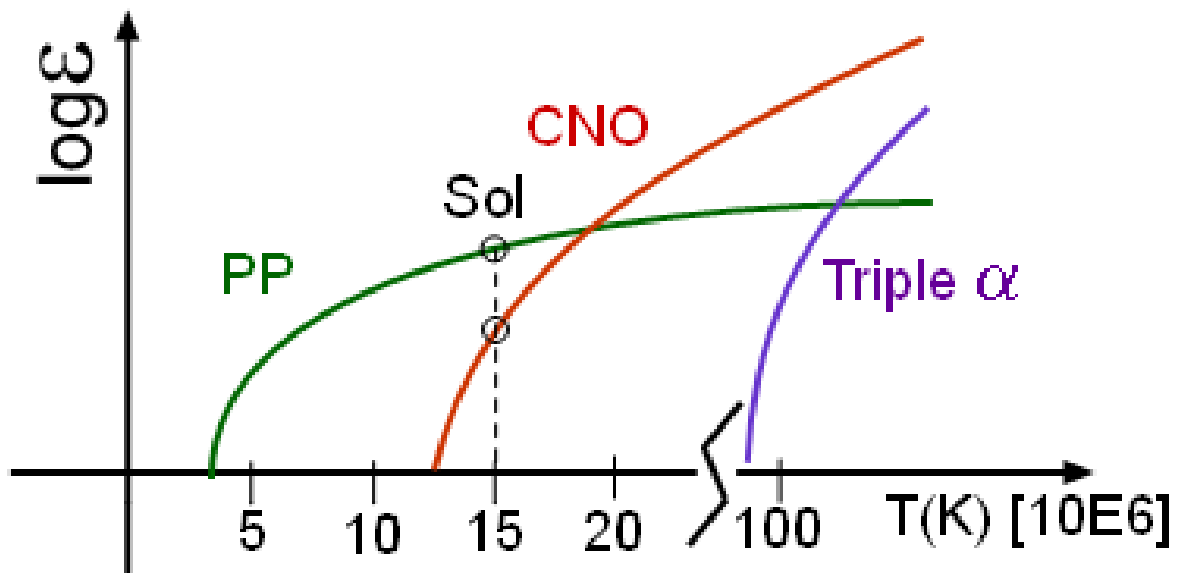


Tabela 4.2. Reakcje jądrowe w cyklu CNO

	Reakcja	Q' [MeV]	Q_ν [MeV]	Oznaczenie
CN	$^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$	1,944	0,71	λ_{p12}
	$^{13}\text{N}(e^+\nu)^{13}\text{C}$	1,510		λ_{13}
	$^{13}\text{C}(p,\gamma)^{14}\text{N}$	7,551		λ_{p13}
	$^{14}\text{N}(p,\gamma)^{15}\text{O}$	7,298	1,00	λ_{p14}
	$^{15}\text{O}(e^+\nu)^{15}\text{N}$	1,752		λ_{15}
	$^{15}\text{N}(p,\alpha)^{12}\text{C}$	4,966		λ_{p15}
ON	$^{15}\text{N}(p,\gamma)^{16}\text{O}$	12,126	0,94	λ_{p15}
	$^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$	0,601		λ_{p16}
	$^{17}\text{F}(e^+\nu)^{17}\text{O}$	2,762		λ_{17}
	$^{17}\text{O}(p,\alpha)^{14}\text{N}$	1,193		λ_{p17}

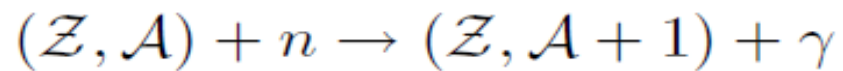


Reakcje 3 α

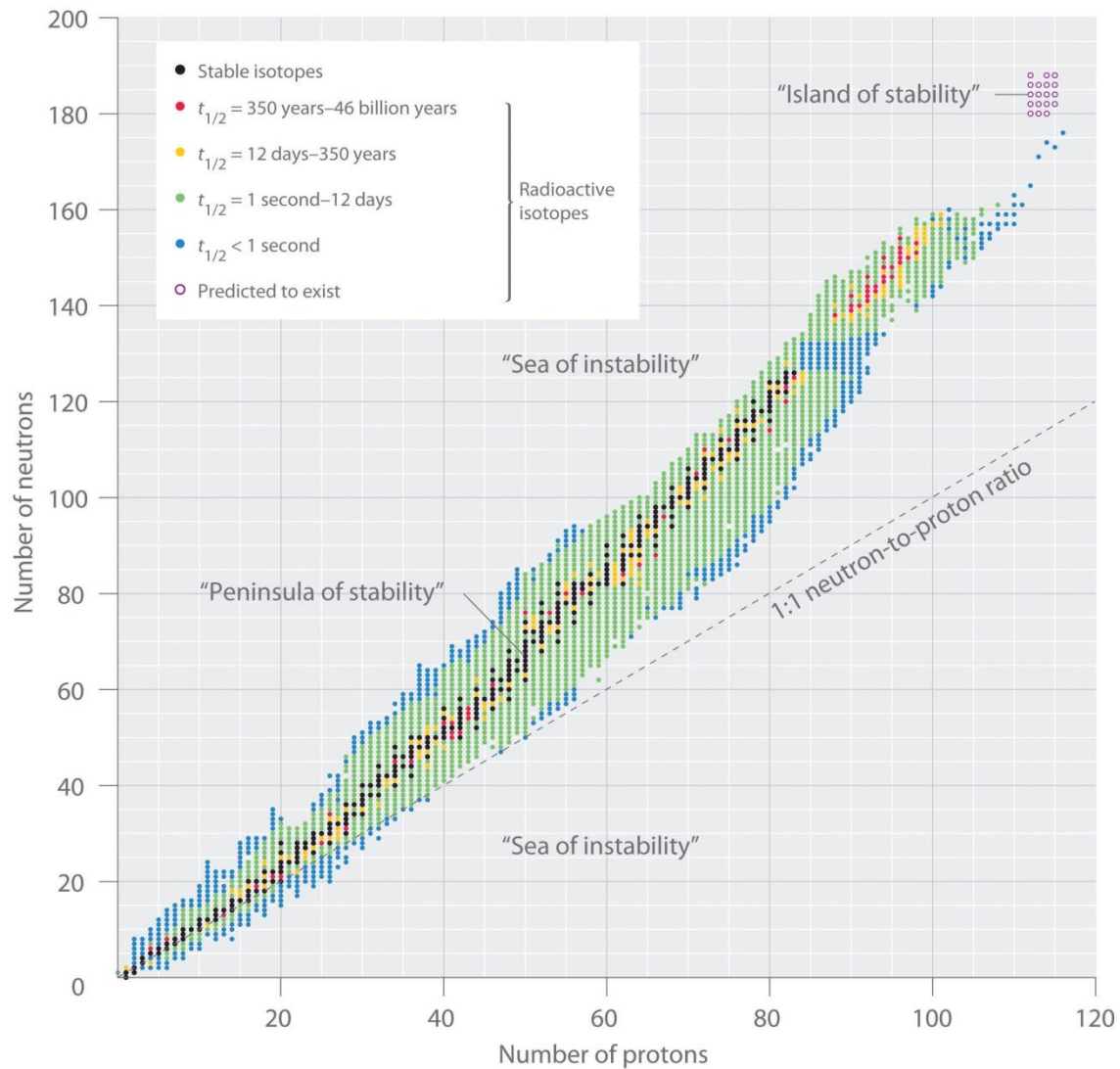
$$T=10^8 \text{ K} \quad \rho=10^4\text{-}10^5 \text{ g/cm}^3$$

Synteza cięższych jąder

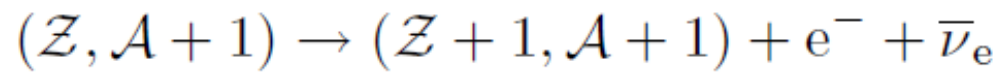
Nukleosynteza poprzez wychwyty neutronów



Wyspa stabilności

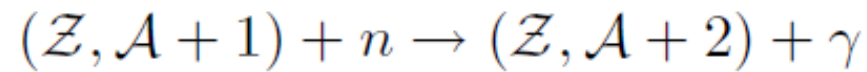


rozpad β^-



nowy
pierwiastek

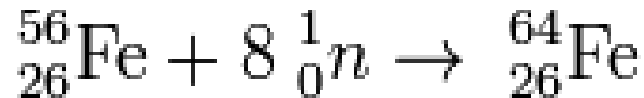
lub



Proces r (r-process, rapid neutron captures process)

Duży strumień neutronów $n_n = 10^{22} - 10^{23} \text{ cm}^{-3}$

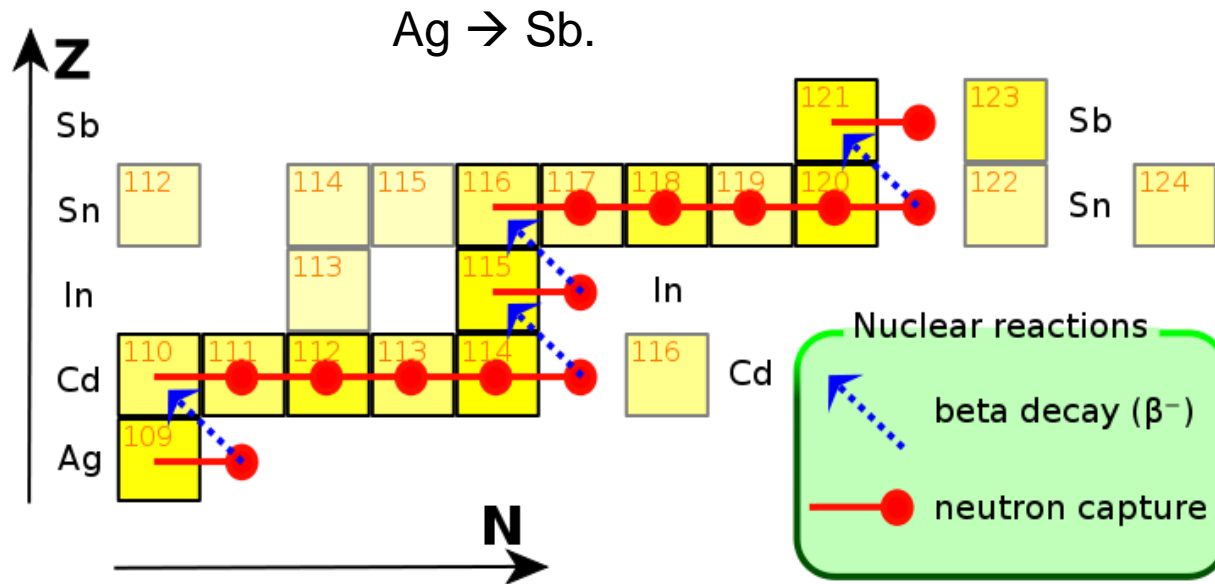
- 1) Szybki wychwyt wielu neutronów
- 2) ciąg spontanicznych rozpadów β^- prowadzących do powstania stabilnego jądra



Występowanie: SN II, zlewające się gwiazdy neutronowe

Proces s (s-process, slow neutron captures process)

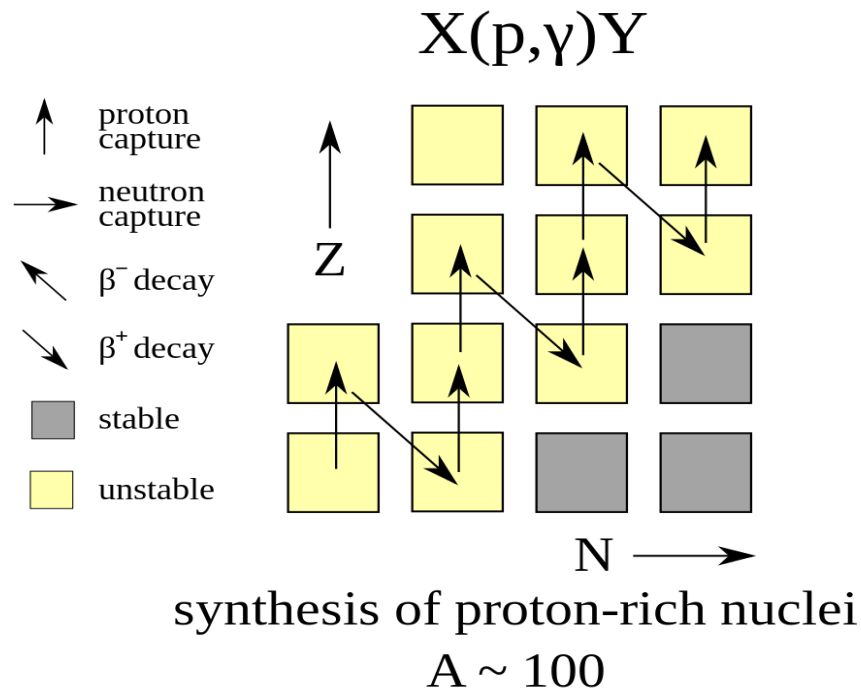
strumień neutronów $n_n = 10^5 - 10^{11} \text{ cm}^{-3}$



Występowanie: gwiazdy AGB

Proces rp (rapid proton capture, szybki wychwyt protonów)

- duży strumień protonów
- $T \approx 10^9$ K (aby pokonać barierę kulombowską)



Występowanie: układy podwójne z gwiazdą neutronową (akrecja)

Transport energii

Promieniowanie → Fotony

Przewodnictwo → atomy, elektrony

Konwekcja → bąble materii

PROMIENIOWANIE

$$\ell_{\text{ph}} = 1/\kappa\rho$$

$$\kappa = 0.2(1+X) \text{ cm}^2\text{g}^{-1}$$

$$\ell_{\text{ph}} \approx 2 \text{ cm} \ll R_{\odot}$$

materia jest b. nieprzez. dla promieniowania

$$\Delta T \approx \frac{dT}{dr} \ell_{\text{ph}} \approx \frac{T_c}{R} \ell_{\text{ph}} \approx \frac{10^7}{10^{11}} \approx 10^{-4} \text{ K}$$



WARUNKI ZBLIŻONE DO TE

jeśli TE \rightarrow przez gwiazdę nie płynąłby strumień

$u = aT^4$ - gęstość en. promieniowania

$$\Delta u / u = 4\Delta T / T$$

dla Słońca $\Delta T / T \sim 10^{-11}$

Ta mała anizotropia jest nośnikiem całego strumienia en. !

Przybliżenie dyfuzyjne

$$\ell_{\text{ph}}/R_{\odot} \sim 10^{-11}$$

$$\text{Dyfuzja: } F_{\text{dyf}} = -D \nabla N$$

$$D = (v l) / 3$$

Fotony:

$$v \rightarrow c$$

$$l \rightarrow l_{\text{ph}} = 1 / (\kappa \rho)$$

$$N = U_{\text{rad}} = a T^4$$

Przybliżenie dyfuzyjne

$$F_{\text{dyf}} = -D \nabla N$$

$$D = (vl)/3$$

Fotony:

$$v \rightarrow c$$

$$l \rightarrow l_{\text{ph}} = 1/(\kappa\rho)$$

$$N = U_{\text{rad}} = aT^4$$

Transport promienisty

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\frac{4}{3} \frac{acT^3}{\kappa\rho} \nabla T.$$

Gradient promienisty

$$\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4}$$

PRZEWODNICTWO

$$\begin{aligned} \ell_{\text{particle}} &\ll \ell_{\text{ph}} \\ v &\sim \text{kilka \% } c \end{aligned}$$

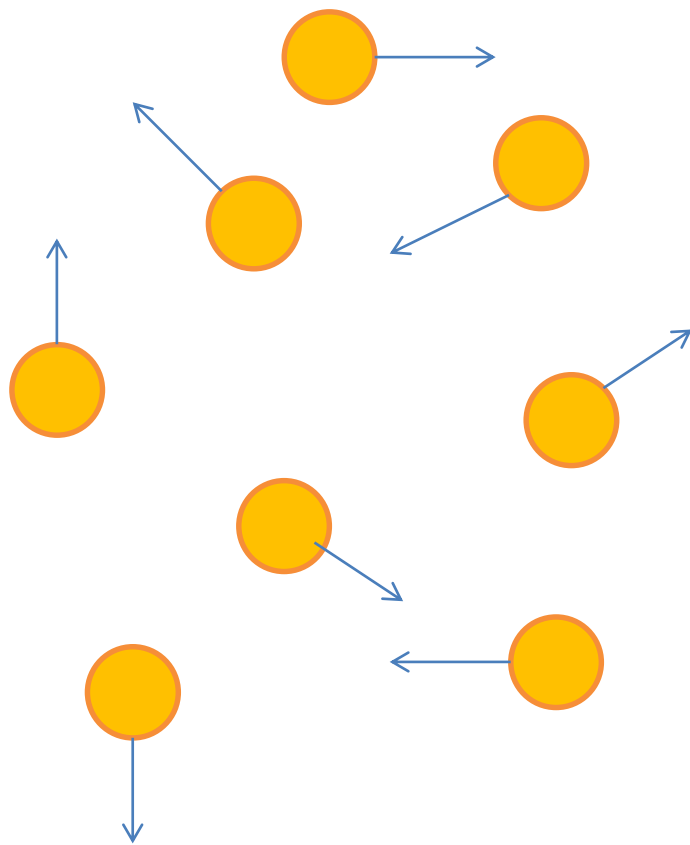
Gaz elektronowy zdegenerowany

$$v \uparrow \text{ oraz } \ell_e \gg \ell_{\text{ph}}$$

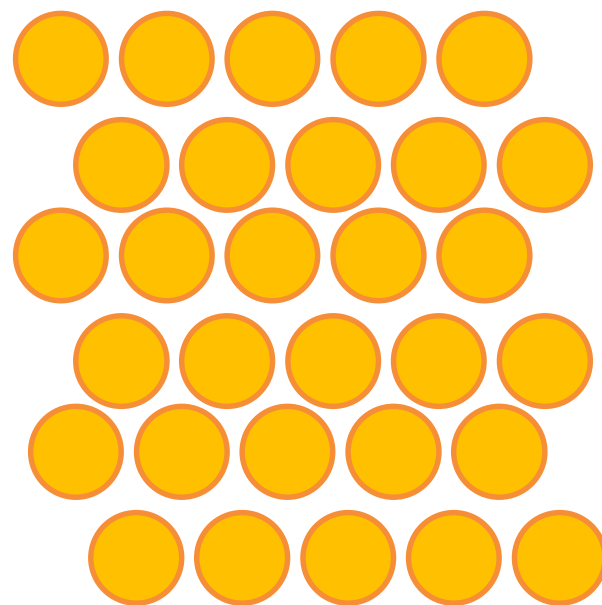
np. w białych karłach

$$F_{\text{cd}} = -K_{\text{cd}} \nabla T$$

Gaz „normalny”



Gaz zdegenerowany



KONWEKCJA

unoszenie materii gorętszej
w chłodniejszym otoczeniu

KONWEKCJA

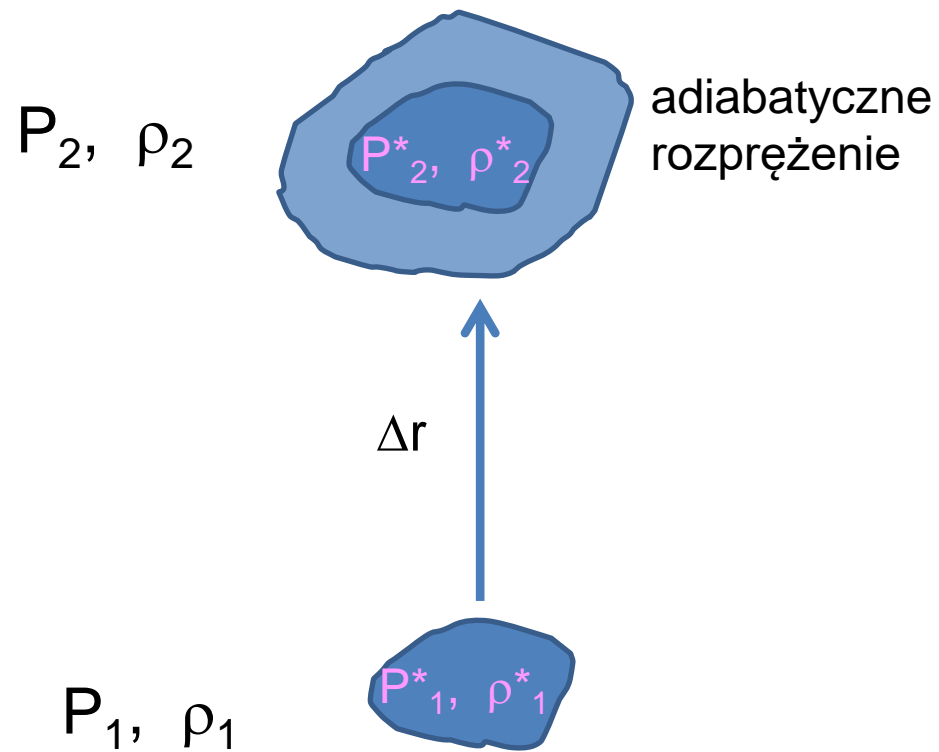
- wraz z materią unoszona jest energia a dT/dr zostaje zmodyfikowany
 - mieszanie

Wnętrze: $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$

zewnątrzne obszary: np. opis MLT

Założenia:

- 1) Element jest w równowadze ciśnieniowej z otoczeniem
- 2) Ruch jest adiabatyczny



Ruch elementu konwekcyjnego z położenia 1 do położenia 2

$\rho_e < \rho_s \rightarrow$ siła wyporu jest skierowana na zewnątrz

Warunek na niestabilność konwekcyjną:

$$(d \rho / dr)_e < (d \rho / dr)_s$$

niepraktyczny

NIESTABILNOŚĆ KONWEKTYWNA

$\nabla > \nabla_{ad}$ - kryterium Schwarzschilda

$\nabla > \nabla_{ad} + \nabla_{\mu}$ - kryterium Ledoux

dla $\nabla_{\mu}=0$ kryteria te są równoważne

$\nabla_{\mu} \uparrow \rightarrow$ stabilizacja

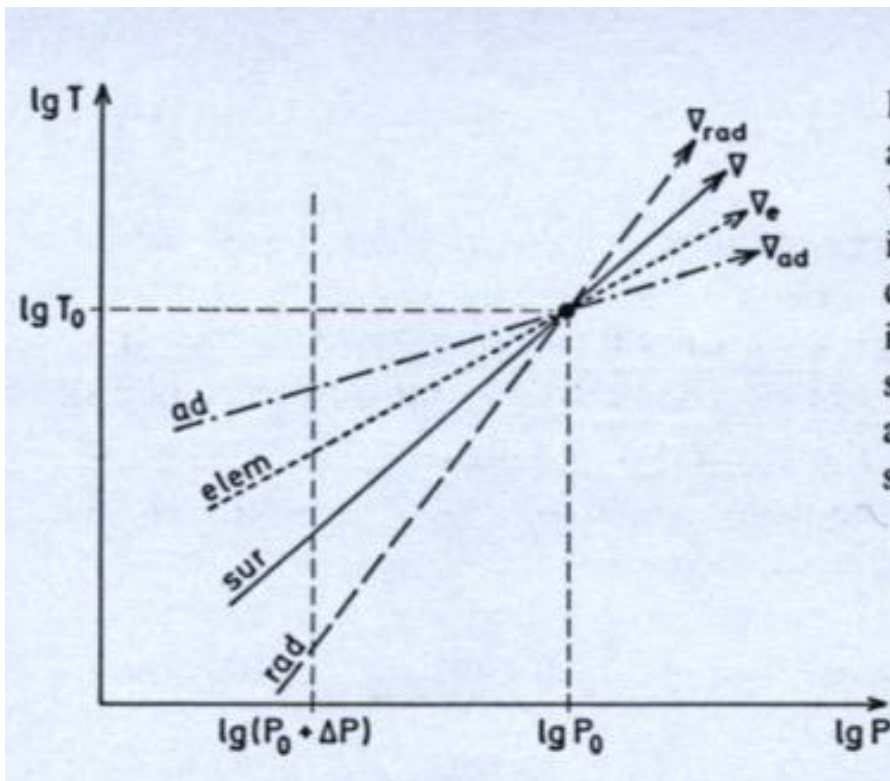
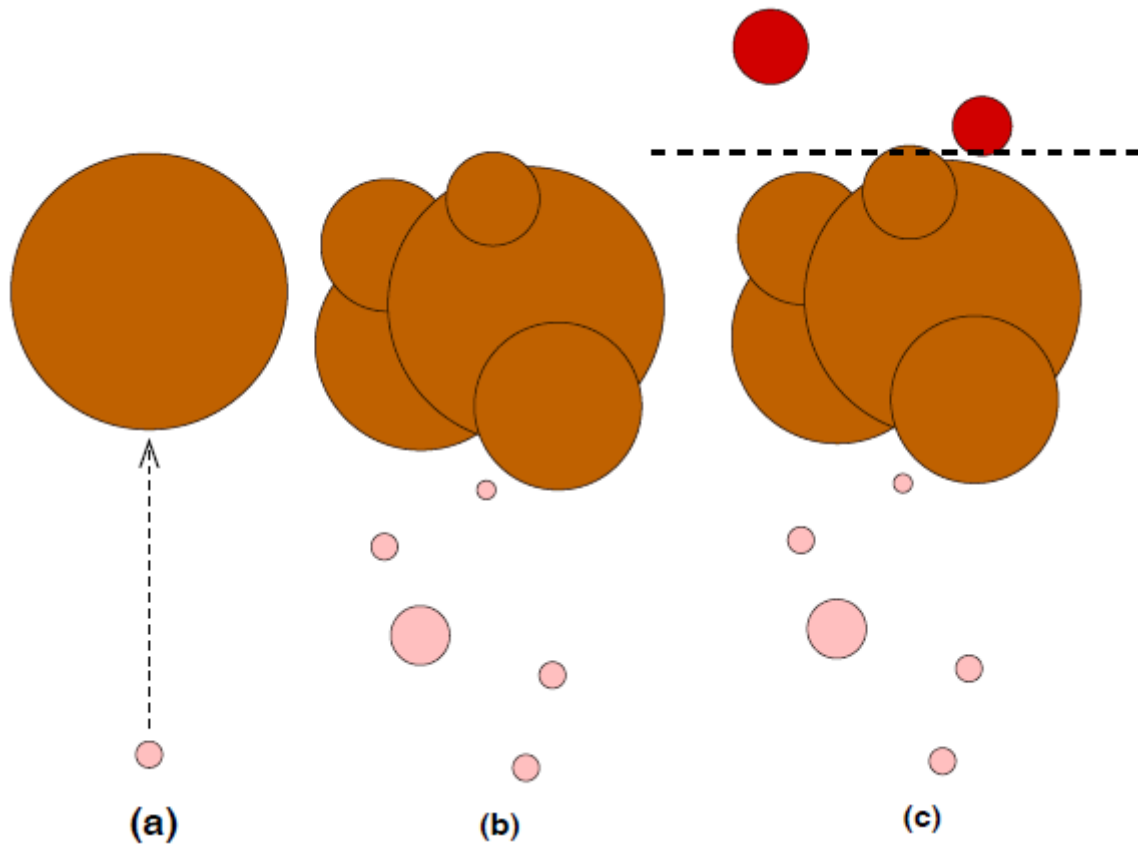


Fig. 6.2. Temperature–pressure diagram with a schematic sketch of the different gradients $\nabla \equiv \partial \ln T / \partial \ln P$ in a convective layer. Starting at a common point with P_0 and T_0 , the different types of changes (adiabatic, in a rising element, in the surroundings, for radiative stratification) lead to different temperatures at a slightly higher point with $P_0 + \Delta P$ ($< P_0$, since P decreases outwards)

W warstwie konwekcyjnej

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$$



Gdzie występuje konwekcja

$$\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4}$$

$$l \equiv L_r$$

$$P = \rho R_g T / \mu$$

1) L_r / m duże

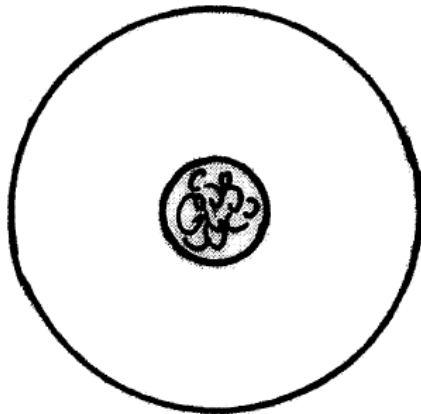
2) κ duże

3) ρ / T^3 duże

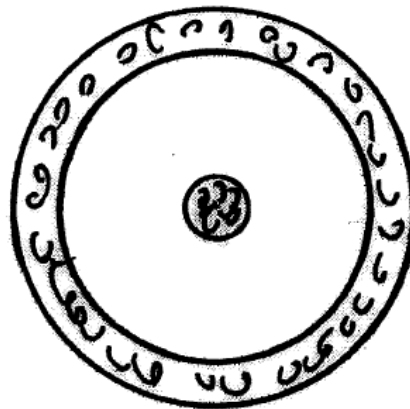
4) małe wartości ∇_{ad}

Obszary konwekcyjne w gwiazdach ciągu głównego

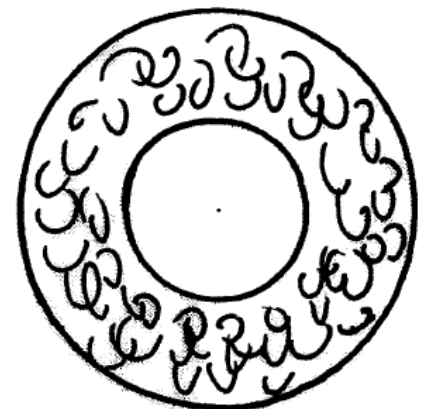
$$M \geq 2M_{\odot}$$



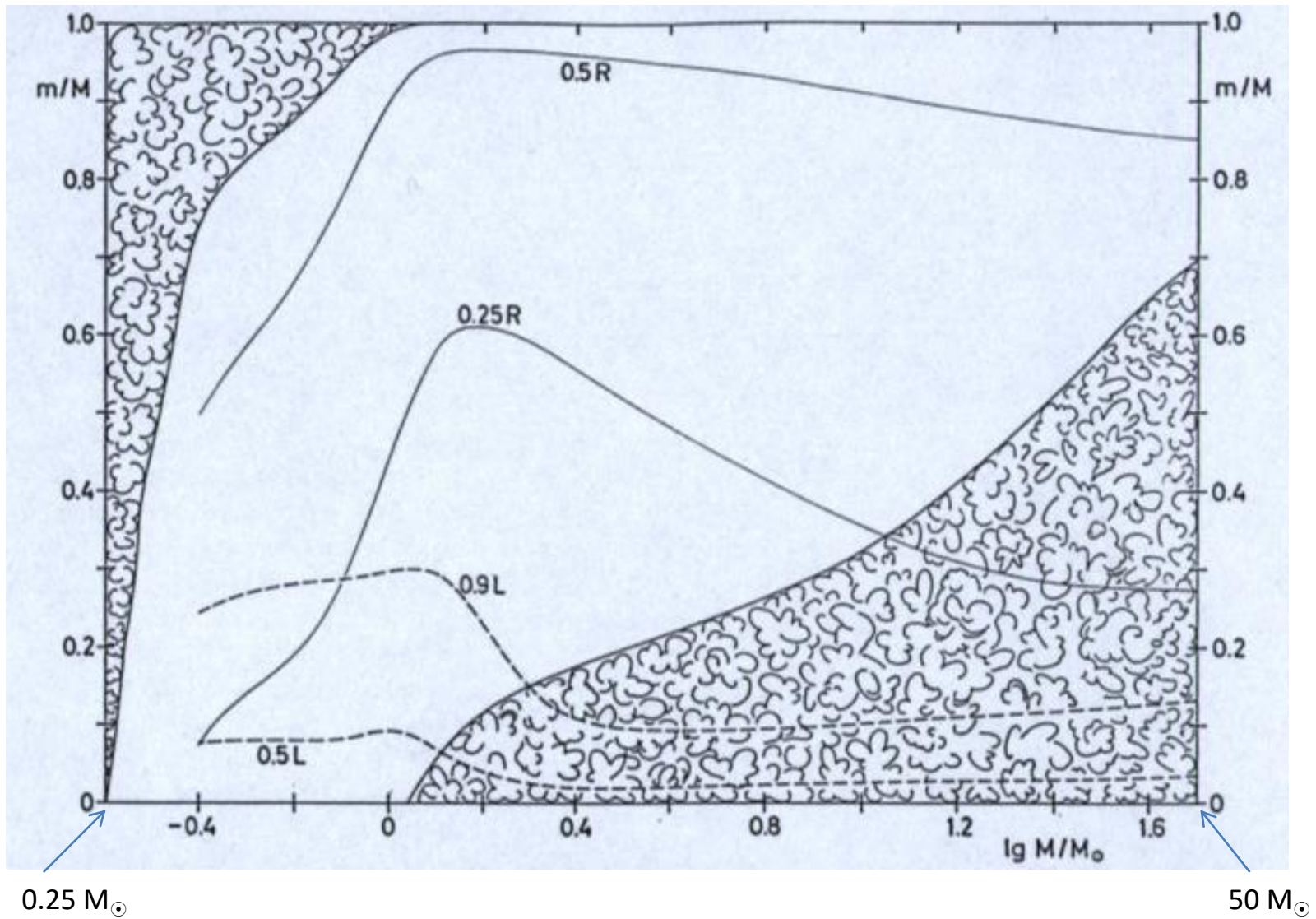
$$1M_{\odot} < M < 2M_{\odot}$$



$$M \leq 1M_{\odot}$$



Budowa wewnętrzna dla modeli ZAMS



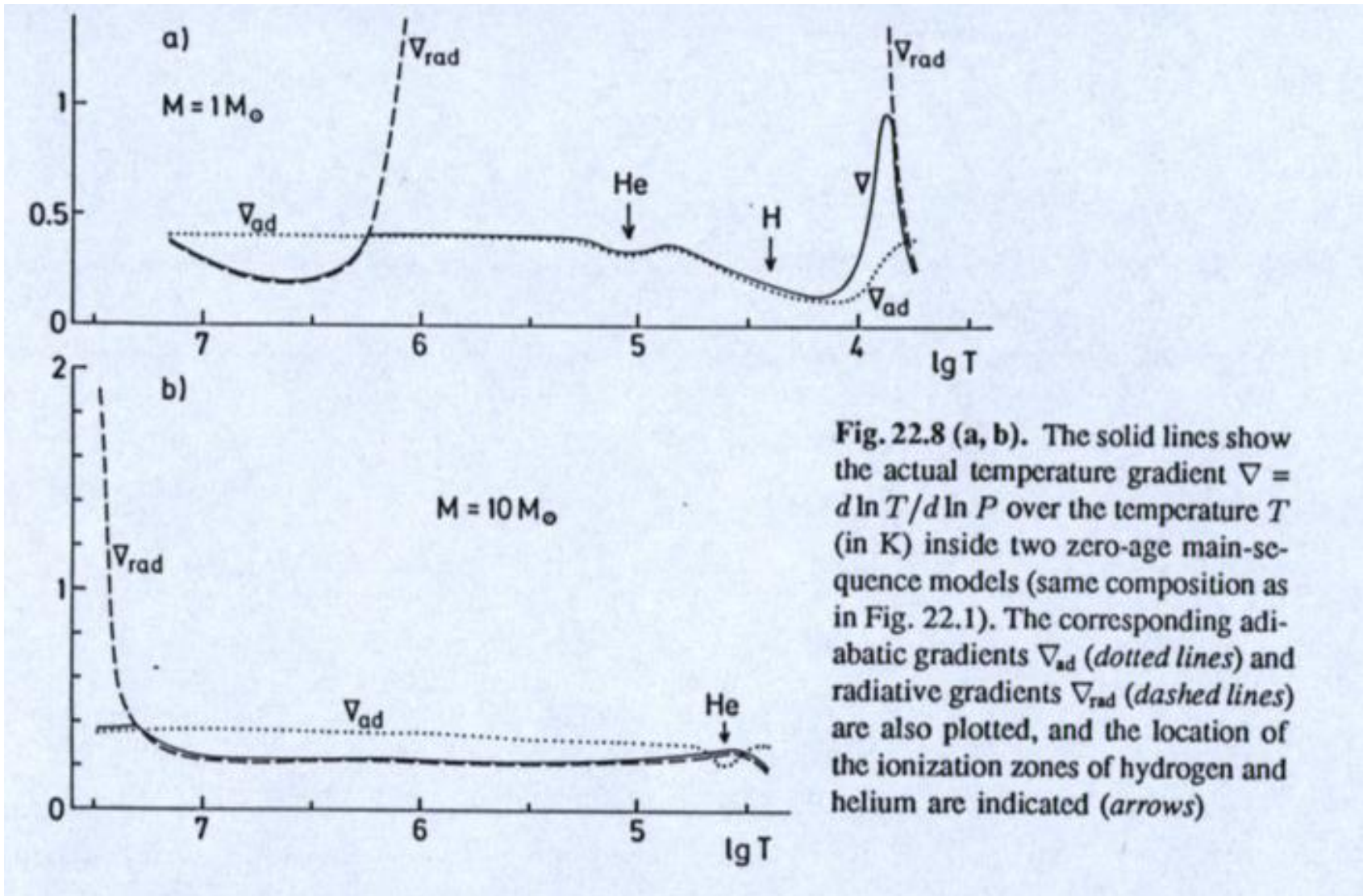
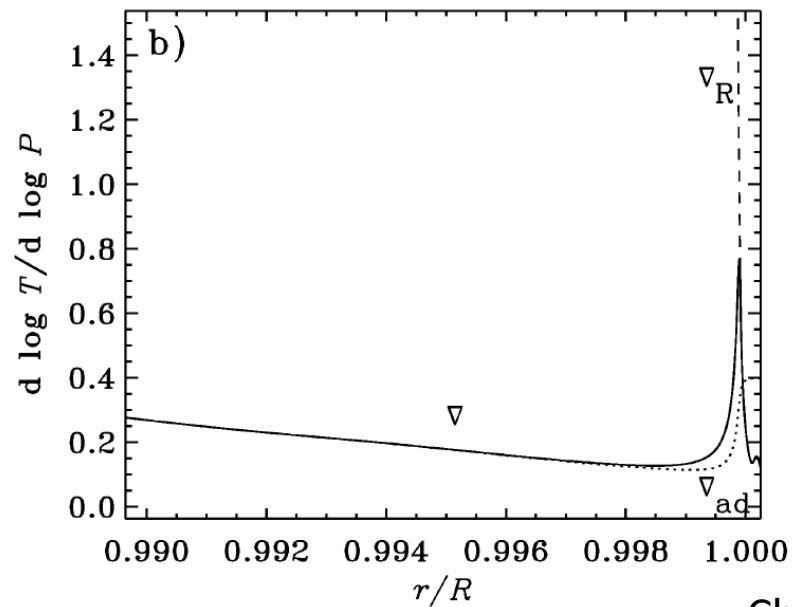
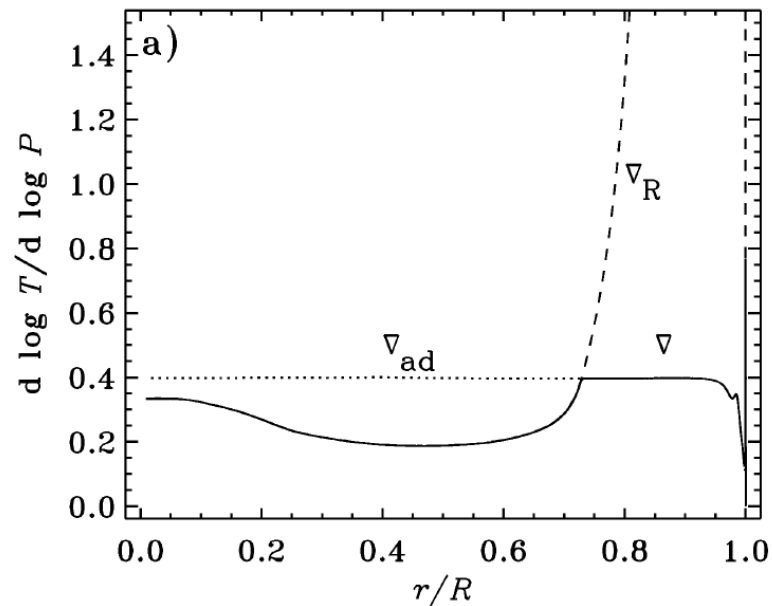
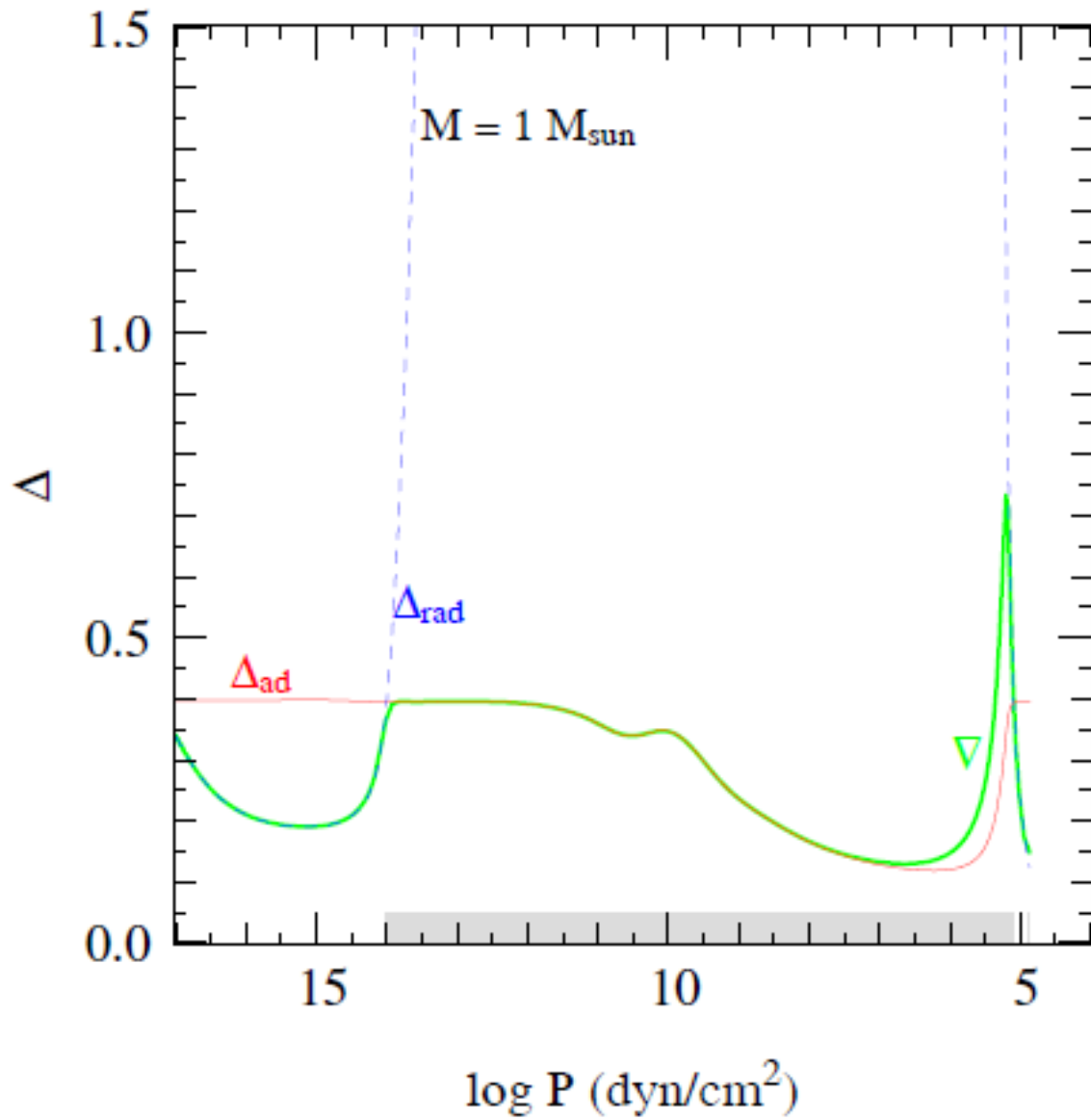


Fig. 22.8 (a, b). The solid lines show the actual temperature gradient $\nabla = d \ln T / d \ln P$ over the temperature T (in K) inside two zero-age main-sequence models (same composition as in Fig. 22.1). The corresponding adiabatic gradients ∇_{ad} (dotted lines) and radiative gradients ∇_{rad} (dashed lines) are also plotted, and the location of the ionization zones of hydrogen and helium are indicated (arrows)

Dla Słońca





Równanie transportu energii

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla,$$

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\sigma G} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

transport promienisty

jeśli

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$$

transport konwektywny

Równania budowy wewnętrznej i ewolucji

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$

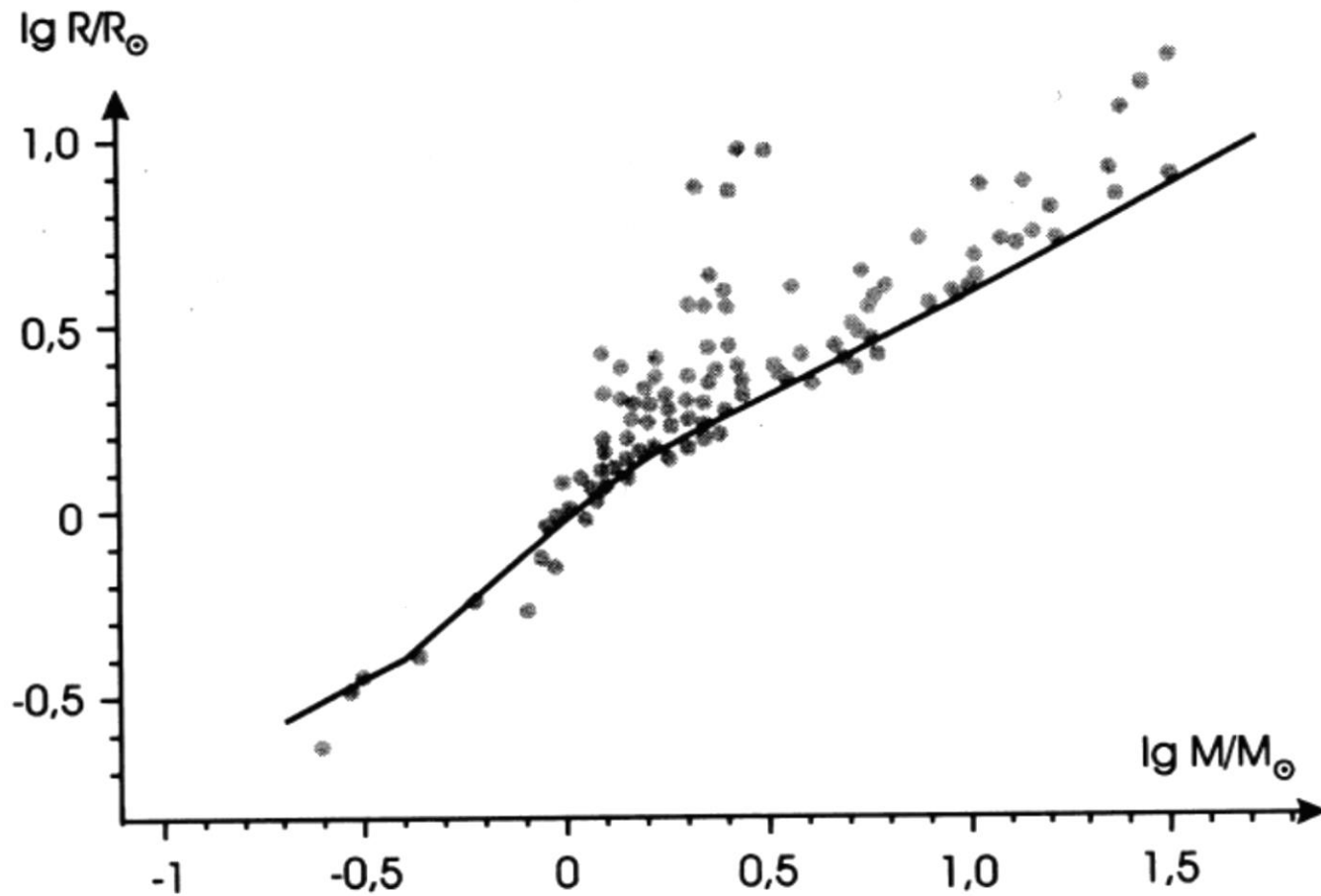
$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \Delta\nabla & \text{if } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) \quad [+ \text{ mixing terms}] \quad i = 1 \dots N$$

PROSTE MODELE GWIAZDOWE

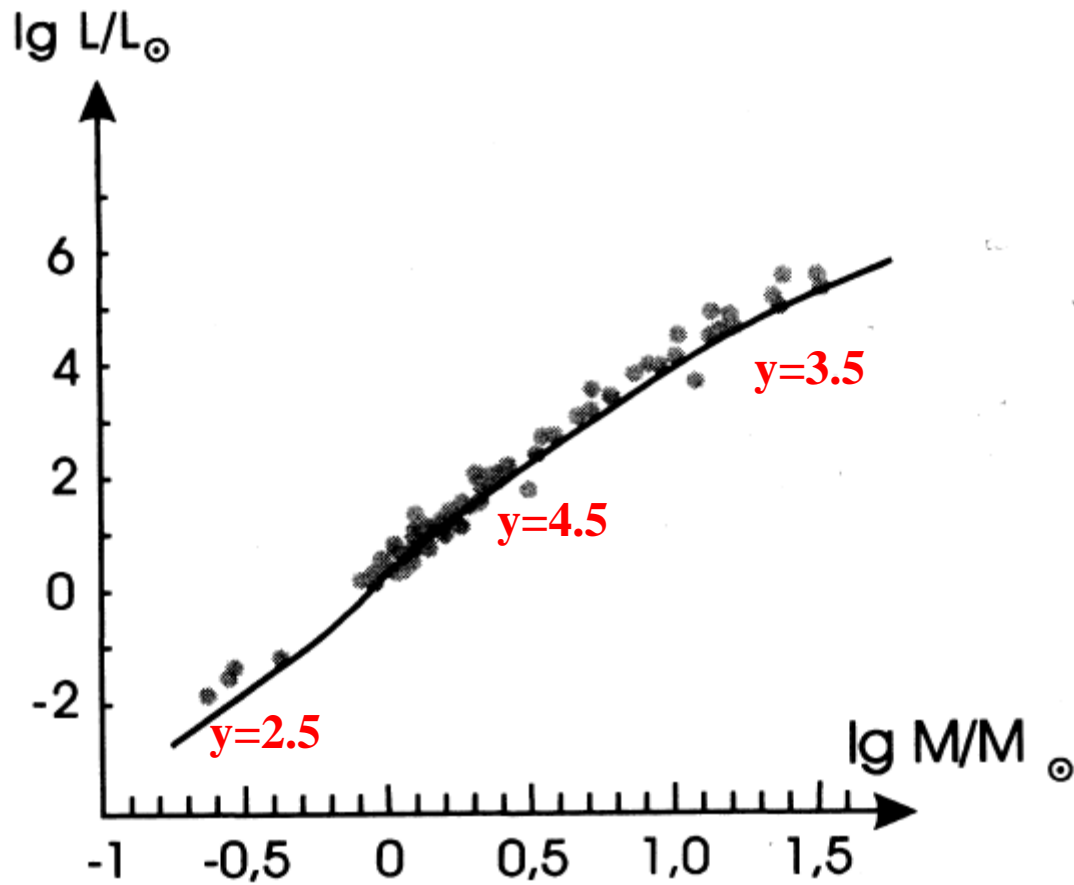
- **modele ZAMS**
- **politropy**
- **modele homologiczne**



$$R \sim M^x$$

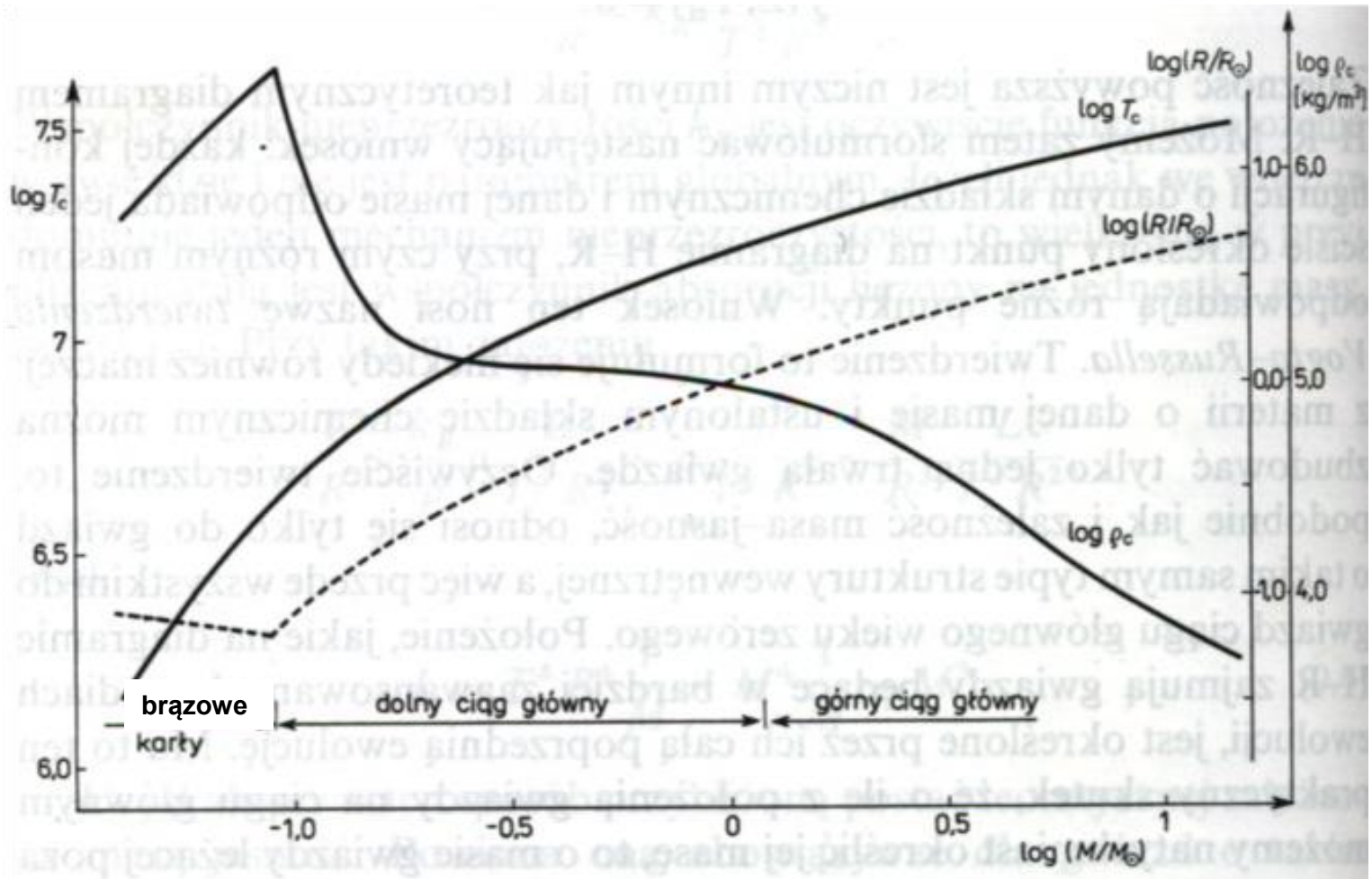
x=0.56 – górny przedział mas

x=0.79 – dolny przedział mas

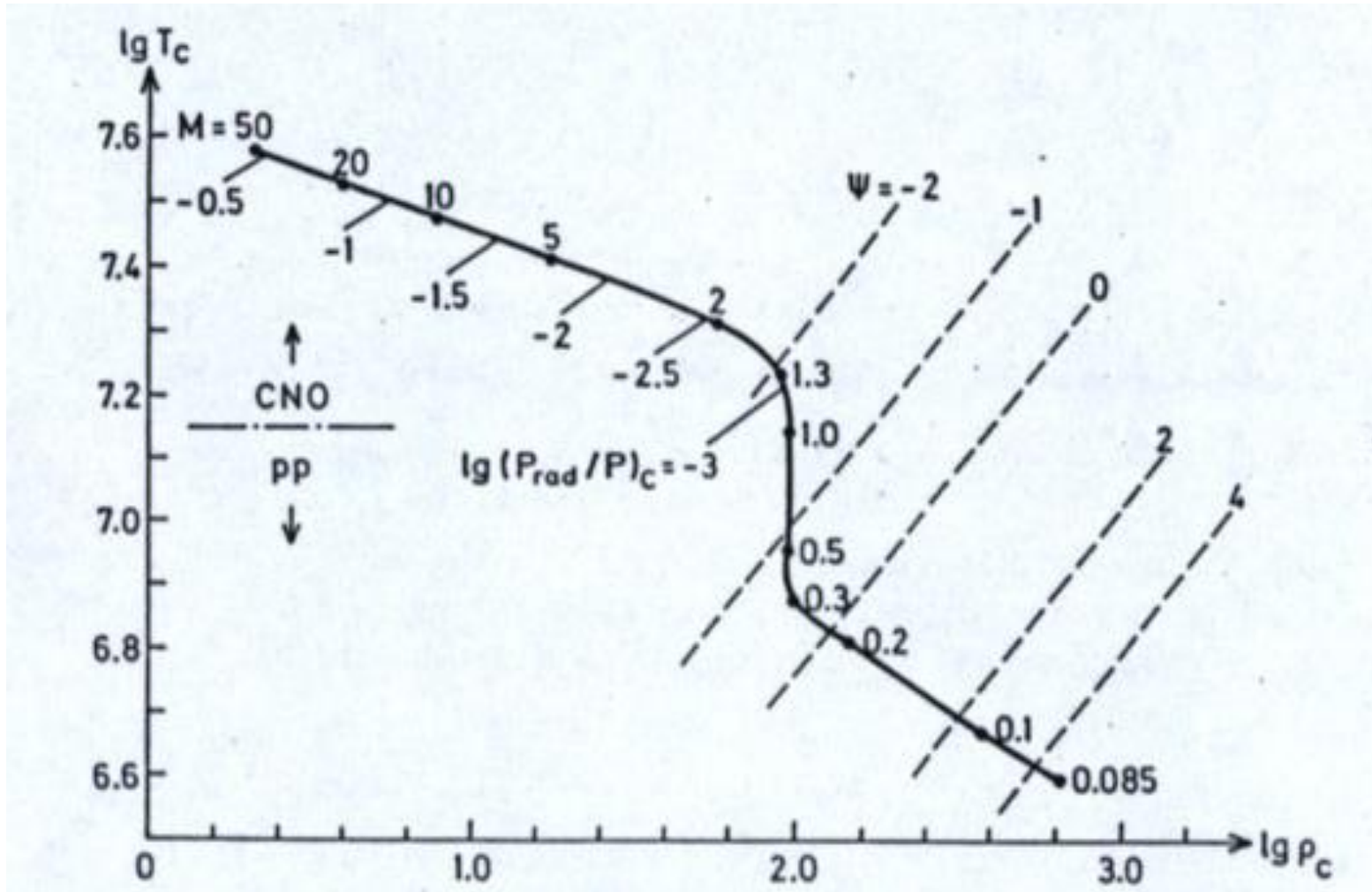


$$L \sim M^y$$

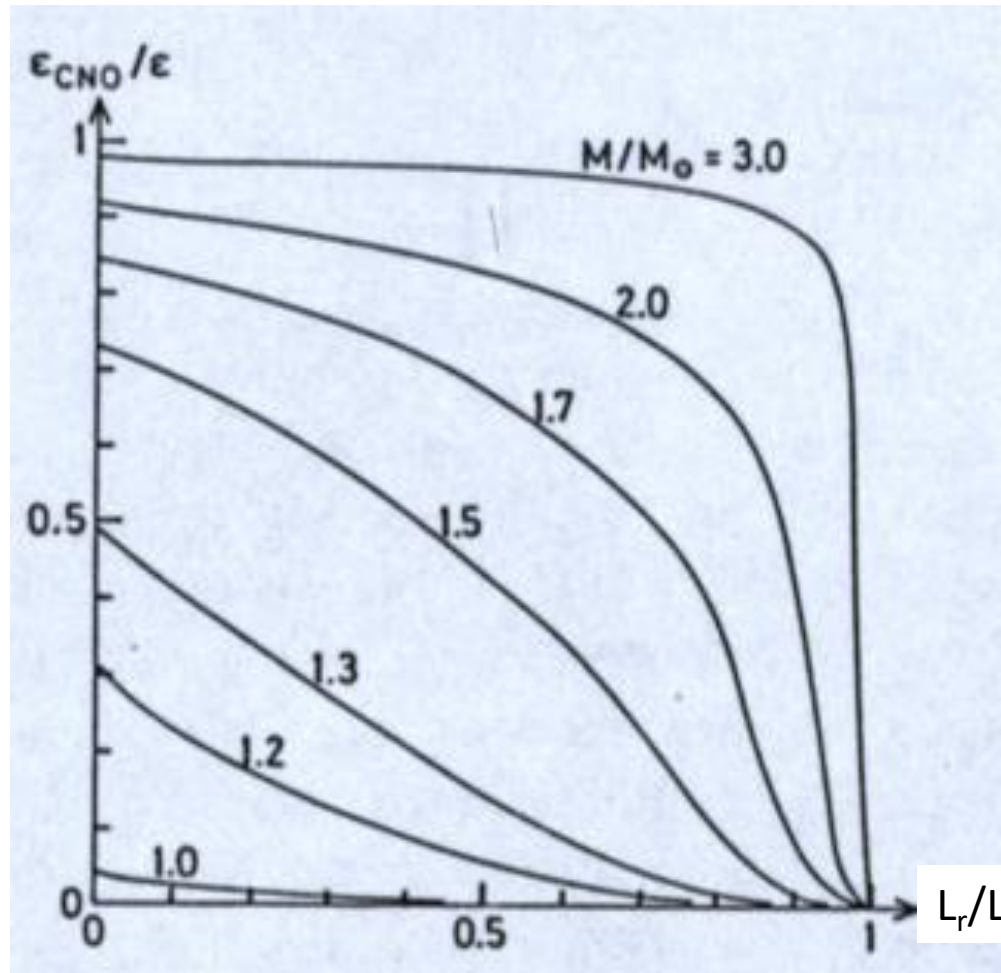
$$y=2.5 - 4.5$$



Zależność $\log T_c$ vs. $\log p$ dla modeli ZAMS



Modele ZAMS. Wkład cyklu CNO do całkowitego tempa produkcji energii w funkcji lokalnej jasności.



Modele ZAMS

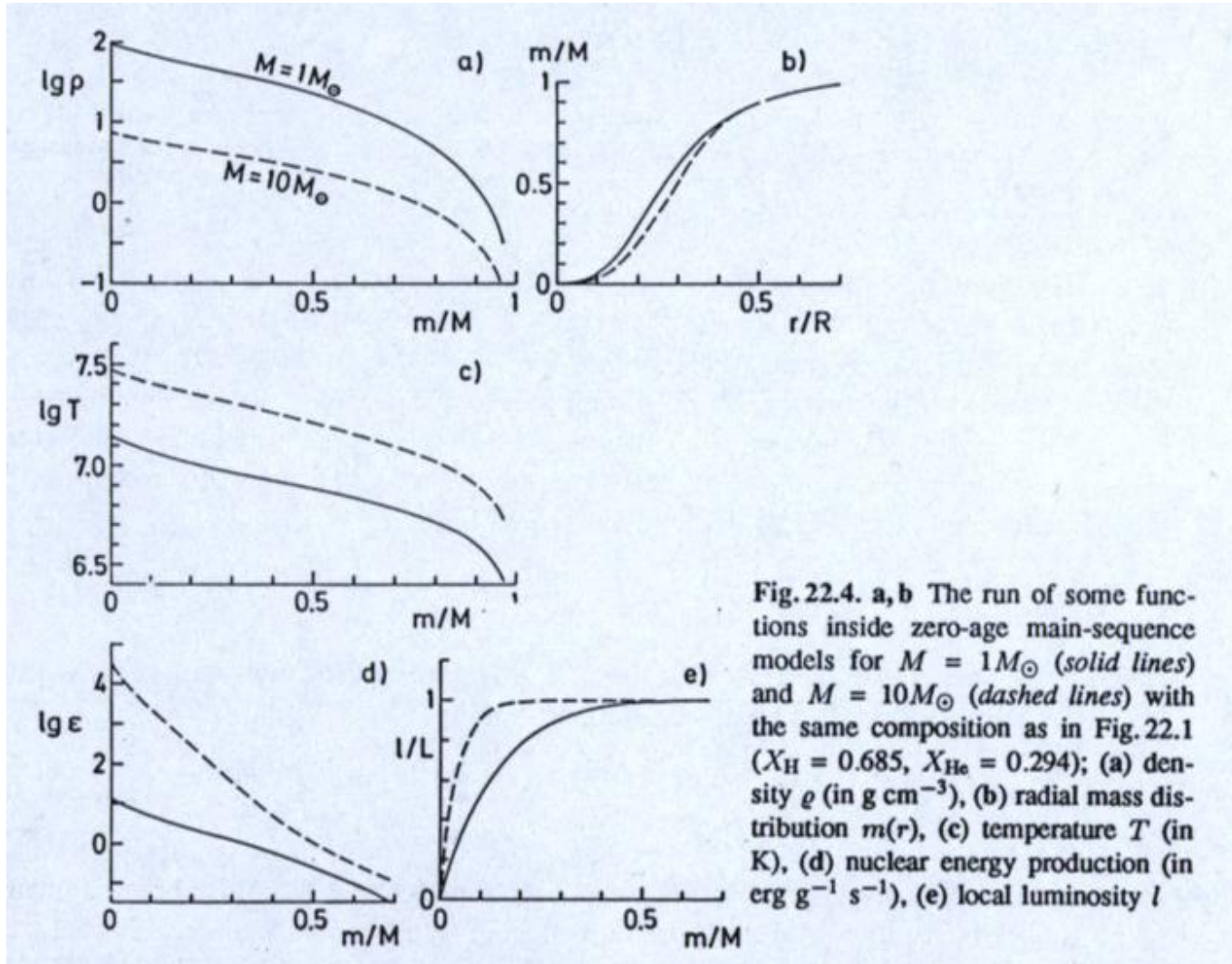


Fig. 22.4. a, b The run of some functions inside zero-age main-sequence models for $M = 1M_{\odot}$ (solid lines) and $M = 10M_{\odot}$ (dashed lines) with the same composition as in Fig. 22.1 ($X_{\text{H}} = 0.685$, $X_{\text{He}} = 0.294$); (a) density ρ (in g cm^{-3}), (b) radial mass distribution $m(r)$, (c) temperature T (in K), (d) nuclear energy production (in $\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$), (e) local luminosity l

POLITROPY

$$P=K\rho^\gamma$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

K - stała politropy

n - indeks politropy

γ - wykładnik politropy

Równanie politropy

(Lane'a-Emdena)

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

$$\rho = \rho_c \theta^n$$

$$r = \alpha \xi,$$

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}$$

Powierzchnia modelu jest wyznaczana przez pierwsze miejsce zerowe, $\theta=0$

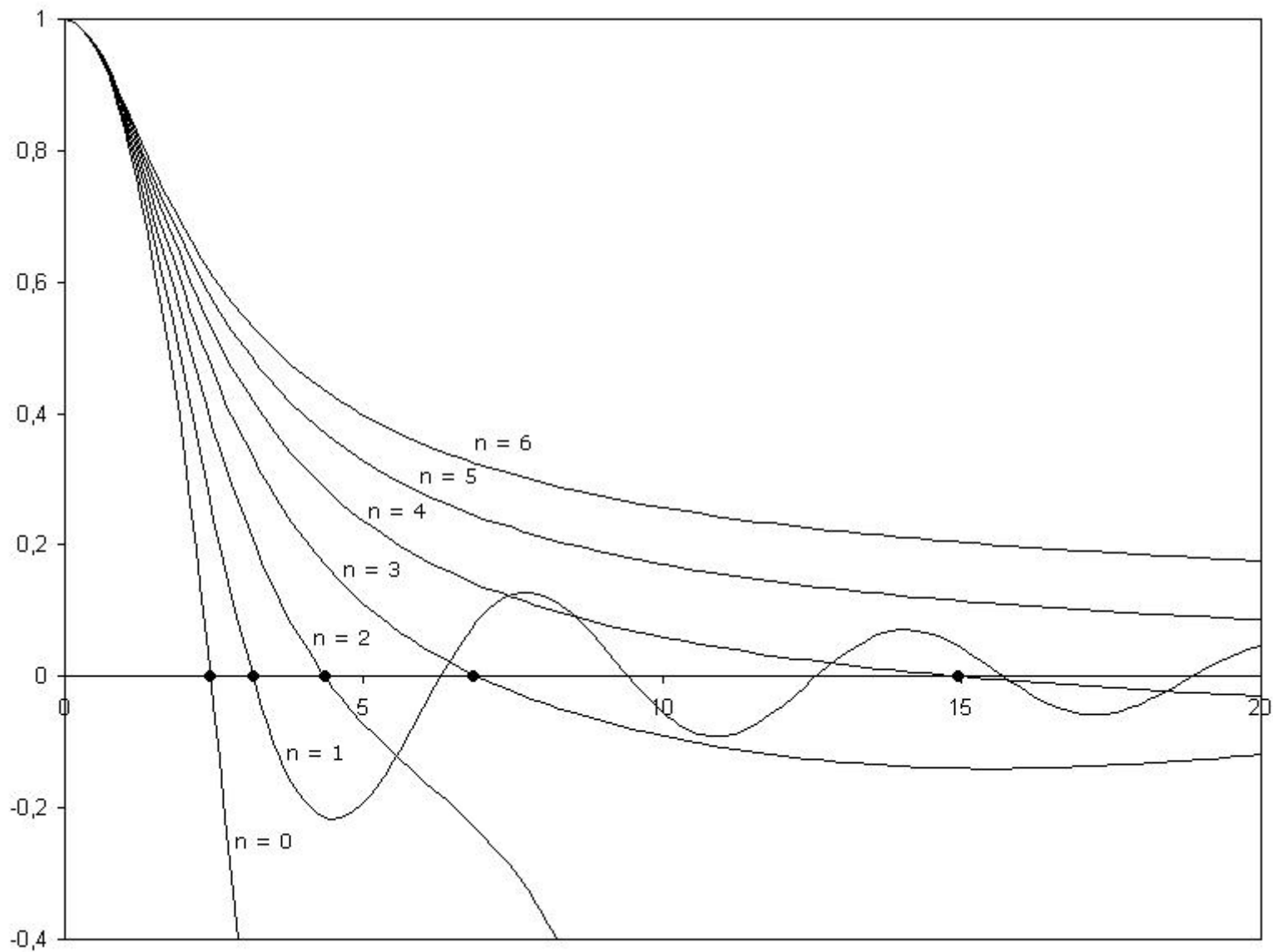
$$\xi_1 = \xi(0)$$

Promień politropy

$$R = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} \xi_1$$

Masa

$$M = -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$$



Analityczne rozwiązania tylko dla:

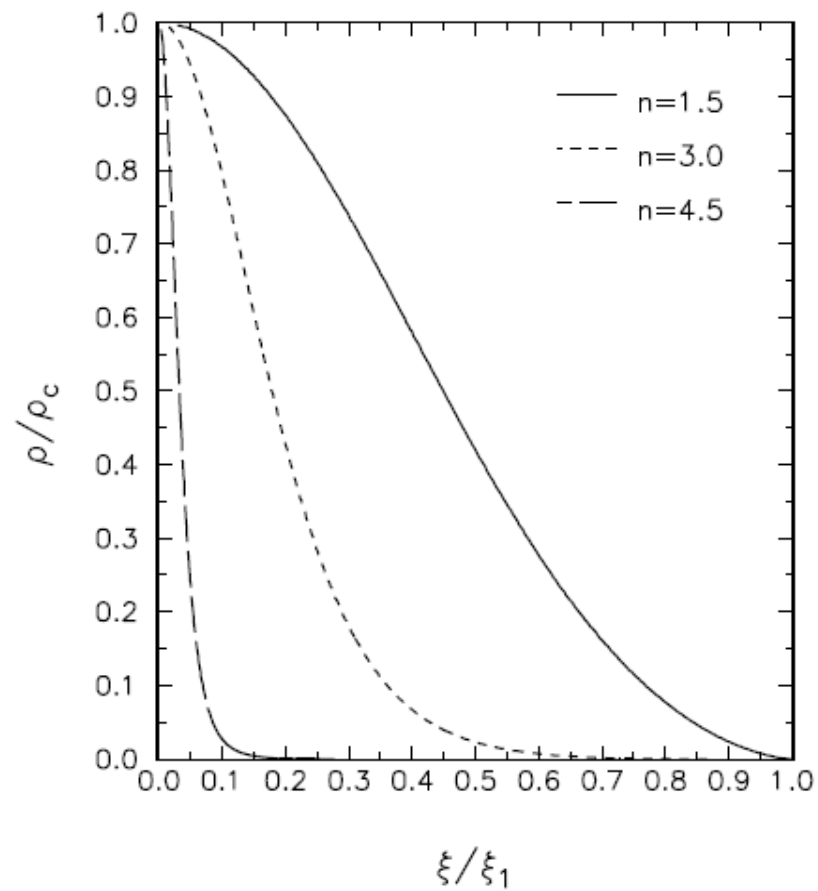
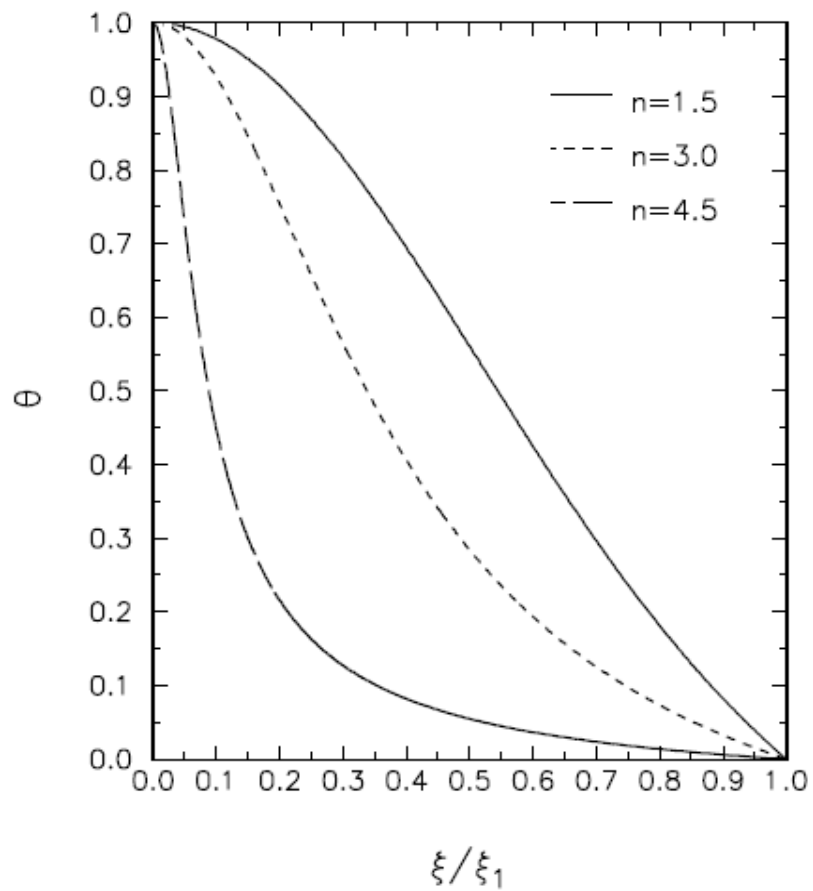
$$n = 0 : \quad \theta_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad \xi_1 = \sqrt{6} ,$$

$$n = 1 : \quad \theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \xi_1 = \pi ,$$

$$n = 5 : \quad \theta_5 = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2} \quad \xi_1 = \infty .$$

Parametry funkcji Lane'a-Emdena

n	ξ_1	$-\xi_1^2 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\rho}$
0.	2.44949	4.89898	1.00000
0.50	2.75270	3.78865	1.83514
1.00	3.14159	3.14159	3.28987
1.50	3.65375	2.71406	5.99070
2.00	4.35287	2.41105	11.40254
2.50	5.35528	2.18720	23.40646
3.00	6.89685	2.01824	54.1825
3.25	8.01894	1.94980	88.1532
3.50	9.53581	1.89056	152.8837
4.00	14.97155	1.79723	622.408
4.50	31.83646	1.73780	6189.47
4.90	171.4335	1.72462	973806
5.0	∞	1.73205	∞



n	ξ_1	$-\xi_1^2 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\rho}$	N_n	W_n
0.	2.44949	4.89898	1.00000	...	0.119366
0.50	2.75270	3.78865	1.83514	2.52360	0.212209
1.00	3.14159	3.14159	3.28987	0.63662	0.392699
1.50	3.65375	2.71406	5.99070	0.42422	0.770140
2.00	4.35287	2.41105	11.40254	0.36475	1.638183
2.50	5.35528	2.18720	23.40646	0.35150	3.909062
3.00	6.89685	2.01824	54.1825	0.36394	11.050679
3.25	8.01894	1.94980	88.1532	0.37898	20.36510
3.50	9.53581	1.89056	152.8837	0.40104	40.90982
4.00	14.97155	1.79723	622.408	0.47720	247.559
4.50	31.83646	1.73780	6189.47	0.65798	4921.84
4.90	171.4335	1.72462	973806	1.35323	3.916826×10^6
5.0	∞	1.73205	∞	∞	∞

Własności politropy
i indeksie n=3

ξ	θ_3	θ_3^3	θ_3^4	$-\frac{d\theta_3}{d\xi}$	q
0.	1.	1.	1.	0.	0.
0.25	0.98968	0.96936	0.95935	0.08179	0.00253
0.50	0.95984	0.88429	0.84878	0.15484	0.01918
0.75	0.91354	0.76240	0.69649	0.21263	0.05926
1.00	0.85506	0.62515	0.53454	0.25213	0.12493
1.25	0.78898	0.49113	0.38749	0.27367	0.21187
1.50	0.71950	0.37247	0.26800	0.27991	0.31206
1.75	0.64999	0.27461	0.17849	0.27460	0.41668
2.00	0.58285	0.19800	0.11541	0.26149	0.51826
2.25	0.51962	0.14030	0.07290	0.24380	0.61154
2.50	0.46113	0.09805	0.04521	0.22397	0.69358
2.75	0.40767	0.06775	0.02762	0.20369	0.76325
3.00	0.35923	0.04636	0.01665	0.18405	0.82074
3.25	0.31554	0.03142	0.009914	0.16567	0.86702
3.50	0.27626	0.02109	0.005825	0.14885	0.90344
3.75	0.24098	0.01399	0.003372	0.13369	0.93151
4.00	0.20928	0.009166	0.001918	0.12017	0.95266
4.25	0.18077	0.005907	0.001068	0.10819	0.96826
4.50	0.15507	0.003729	0.000578	0.09762	0.97946
4.75	0.13185	0.002292	0.000302	0.08831	0.98727
5.00	0.11082	0.001361	0.000151	0.08013	0.99252
5.25	0.09171	0.000771	0.000071	0.07292	0.99590
5.50	0.07429	0.000410	0.000030	0.06658	0.99795
5.75	0.05835	0.000199	0.000012	0.06099	0.99910
6.00	0.04374	0.000084	0.000004	0.05604	0.99967
6.25	0.03029	0.000028	0.000001	0.05166	0.99991
6.50	0.01787	0.000006	0.000000	0.04777	0.99999
6.75	0.00637	0.000000	0.000000	0.04430	1.00000
6.89685	0.00000	0.000000	0.000000	0.04243	1.00000

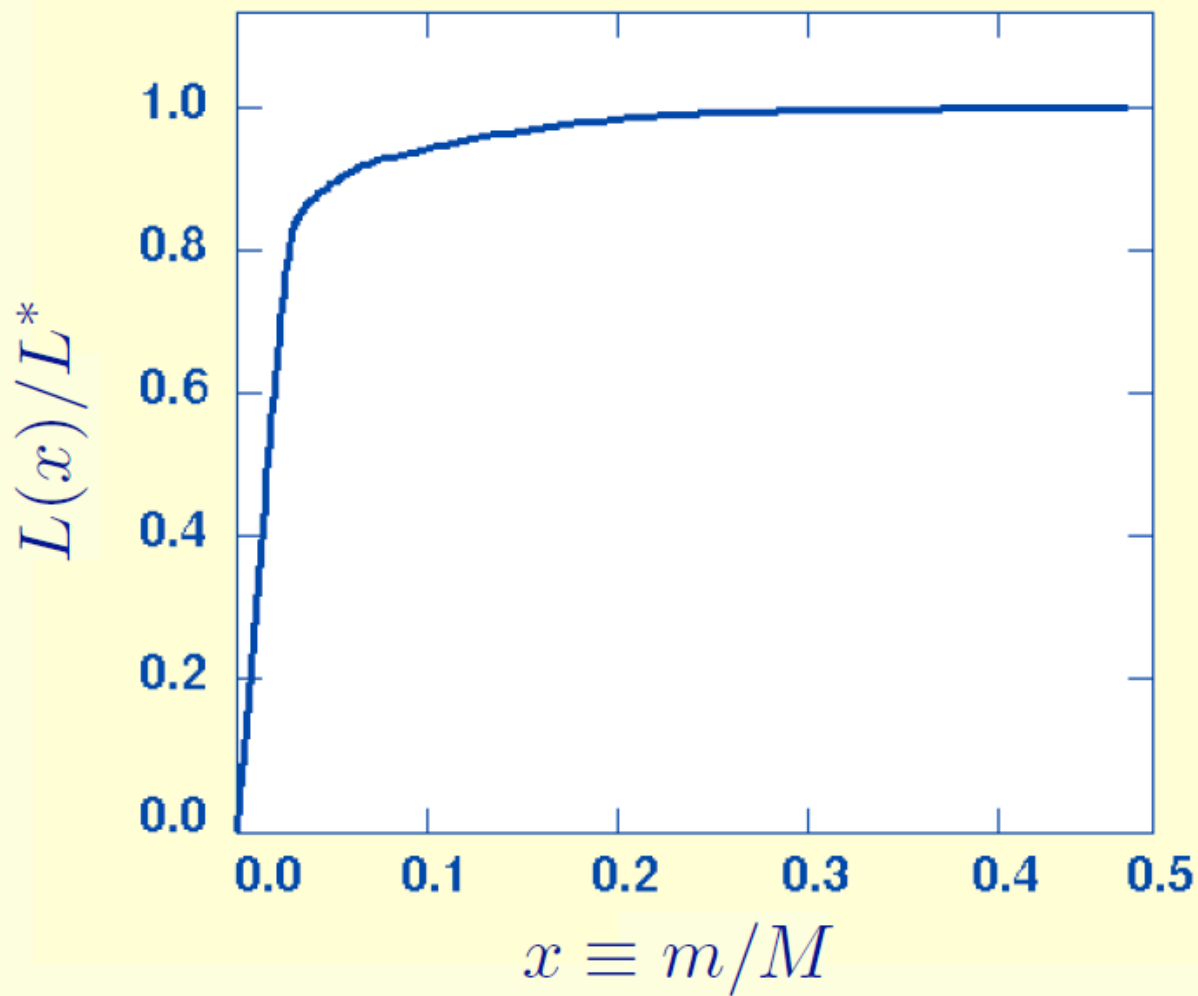
RELACJE HOMOLOGICZNE

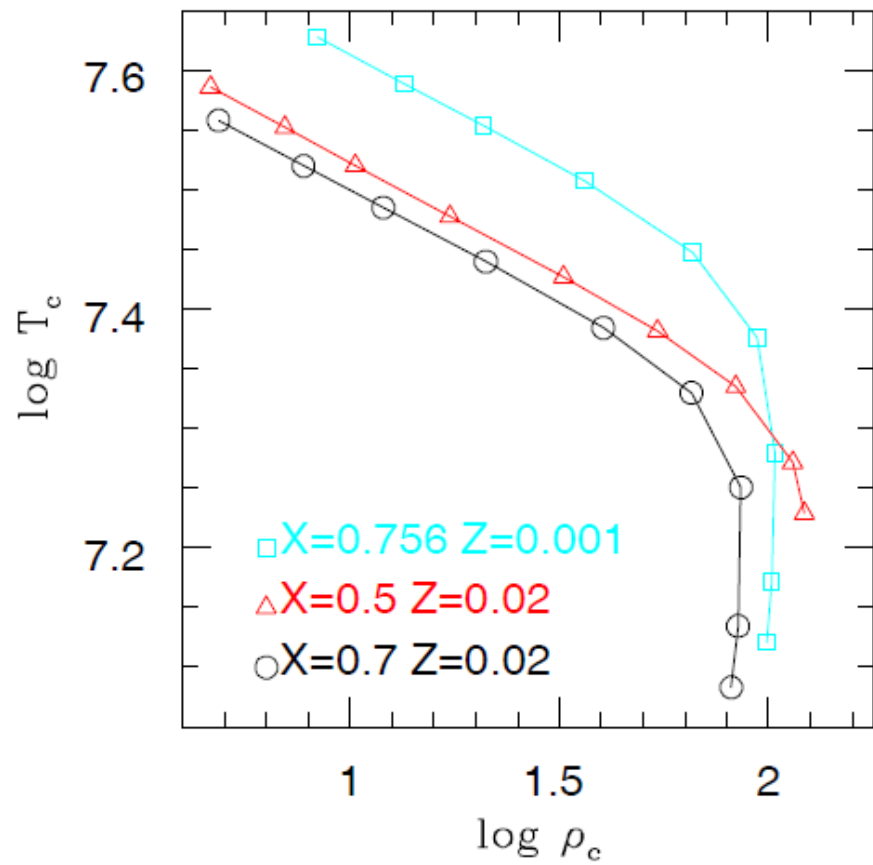
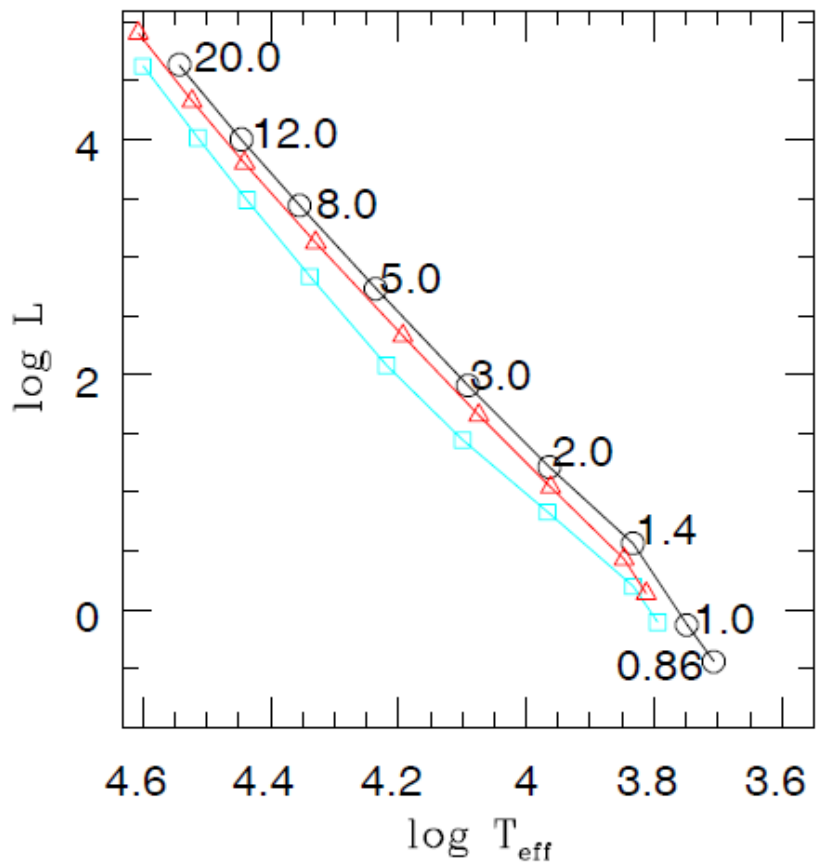
Homó logos (gr.) – zgodny, podobny

$$x = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$$

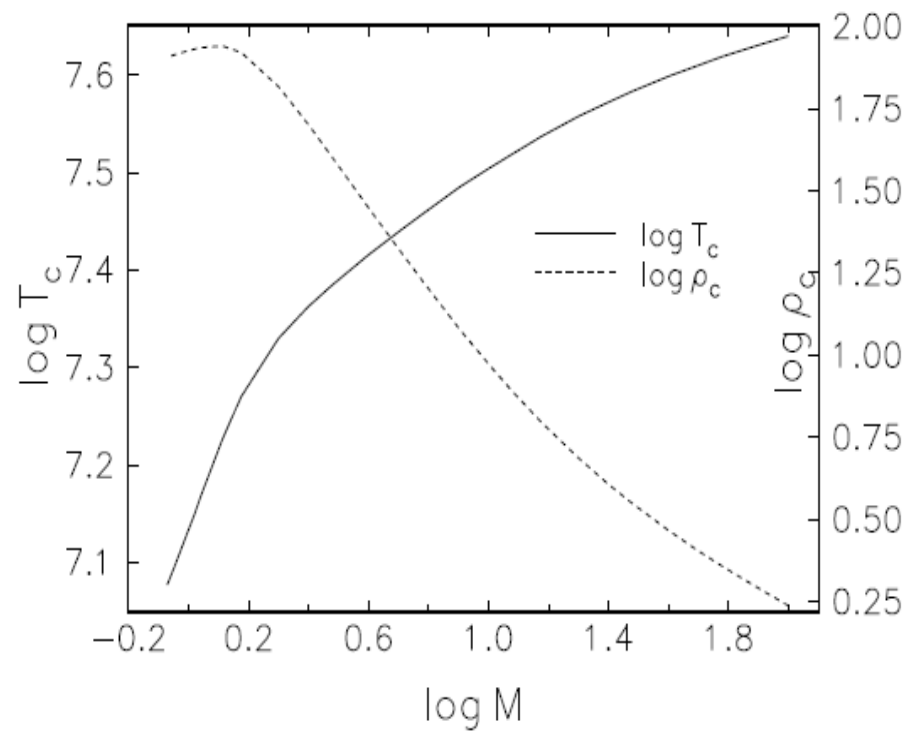
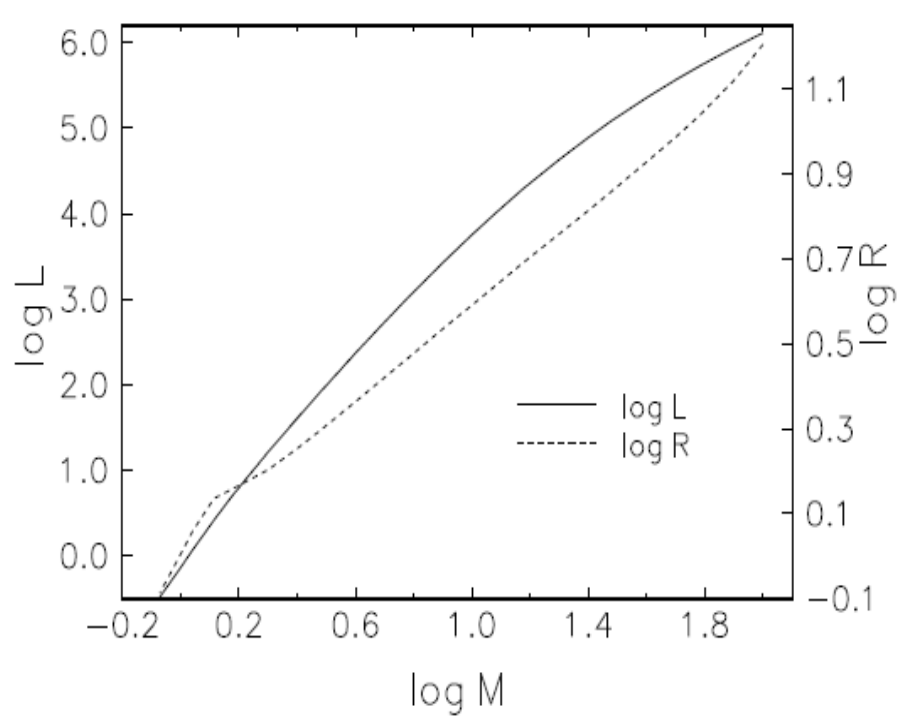
Dla każdego x zachodzi:

$$\frac{r_1(x)}{R_1} = \frac{r_2(x)}{R_2}$$

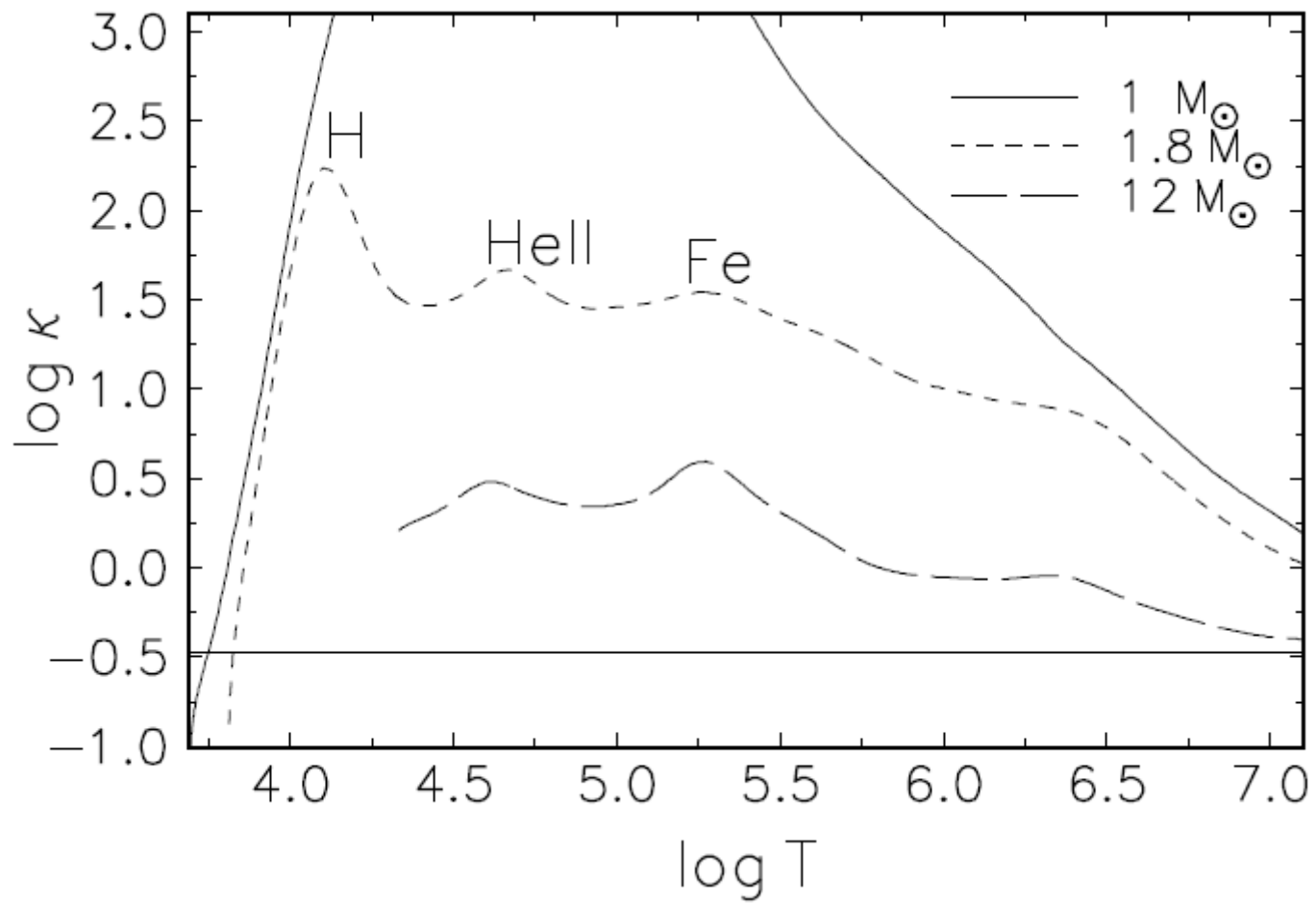




L i M w jednostkach słonecznych



L, M, R w jednostkach słonecznych



Zależność masa-jasność

Transport promienisty

$$L_s \simeq \frac{a\tilde{c}RT^{4+\nu}}{\kappa_0\rho^{\lambda+1}} \simeq \frac{a\tilde{c}}{\kappa_0} \left(\frac{Gm_u\mu}{k_B} \right)^{4+\nu} R^{3\lambda-\nu} M^{3+\nu-\lambda}$$

$$\kappa \simeq \kappa_0\rho^\lambda T^{-\nu}$$

Zależność masa-jasność

Transport promienisty

dolny ciąg główny

$$\begin{aligned} L_s \simeq L_{\text{bf}} &= \frac{a\tilde{c}}{\kappa_0^{(\text{bf})}} \left(\frac{Gm_u\mu}{k_B} \right)^{7.5} R^{-0.5} M^{5.5} \\ &\simeq 1.4 \times 10^{35} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{5.5} \frac{1.7}{1+X} \frac{0.02}{Z} \left(\frac{\mu}{0.62} \right)^{7.5} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-0.5} \text{erg sec}^{-1} \end{aligned}$$

górnny ciąg główny

$$L_s \simeq L_e = \frac{a\tilde{c}}{\kappa_0^{(e)}} \left(\frac{Gm_u\mu}{k_B} \right)^4 M^3 \simeq 3 \times 10^{35} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \left(\frac{\mu}{0.62} \right)^4 \frac{1.7}{1+X} \text{erg sec}^{-1}$$

Zależność masa-jasność

Transport zdominowany przez konwekcję

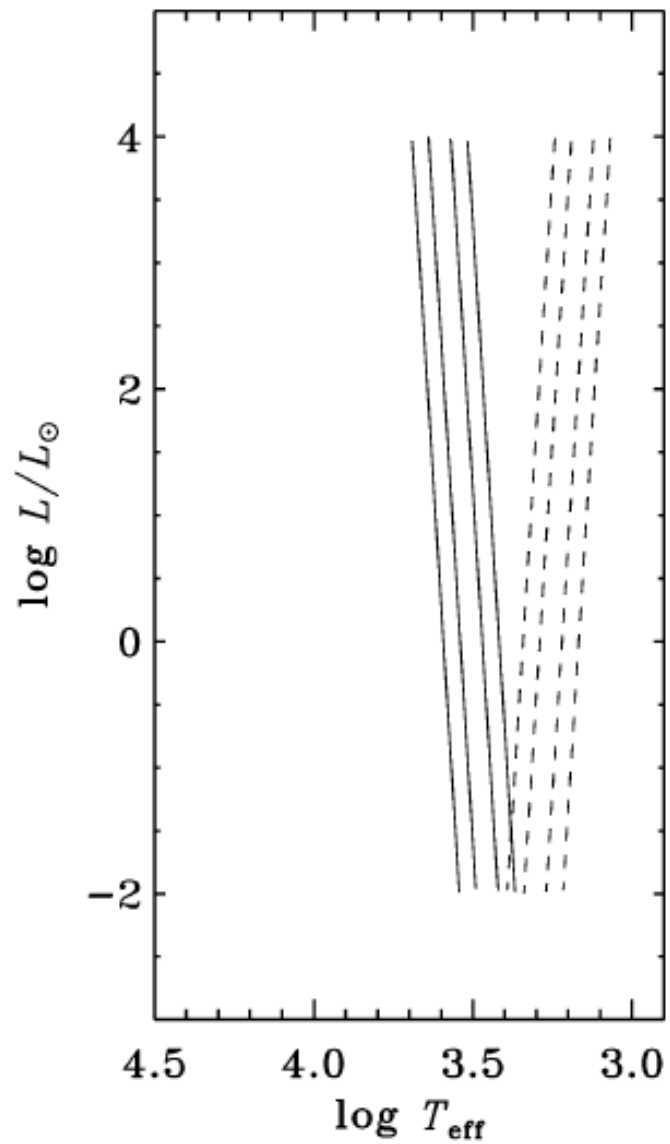
- **Otoczki konwekcyjne**

$$T_{\text{eff}}=f(K) \quad K=P_{\text{ph}}/\rho_{\text{ph}}^{(1+1/n)}$$

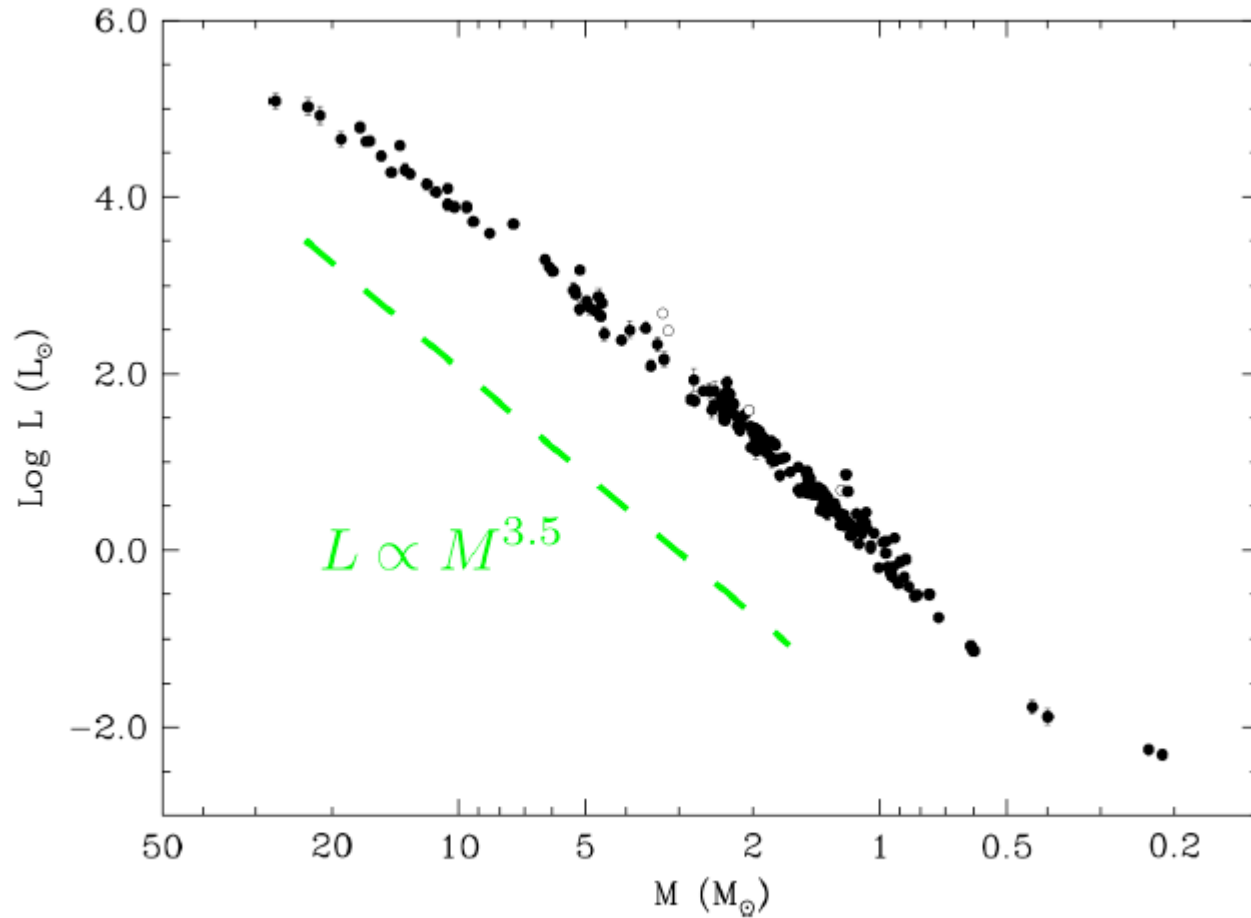
- **Gwiazdy całkowicie konwekcyjne**

$$n=3/2$$

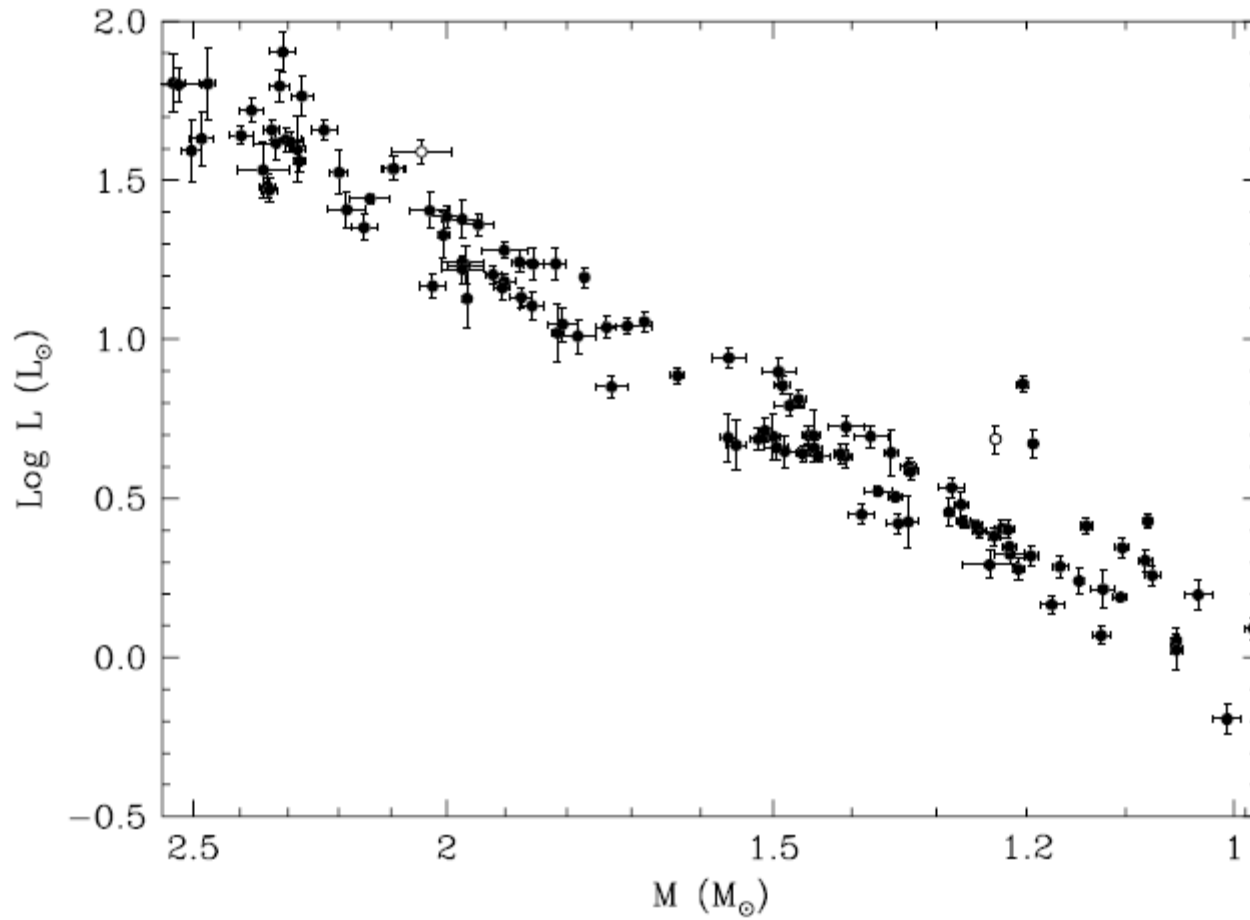
$$T_{\text{eff}}=2 \cdot 10^3 (M/M_{\odot})^{0.15} (L/L_{\odot})^{0.01} (Z/0.02)^{-0.04}$$

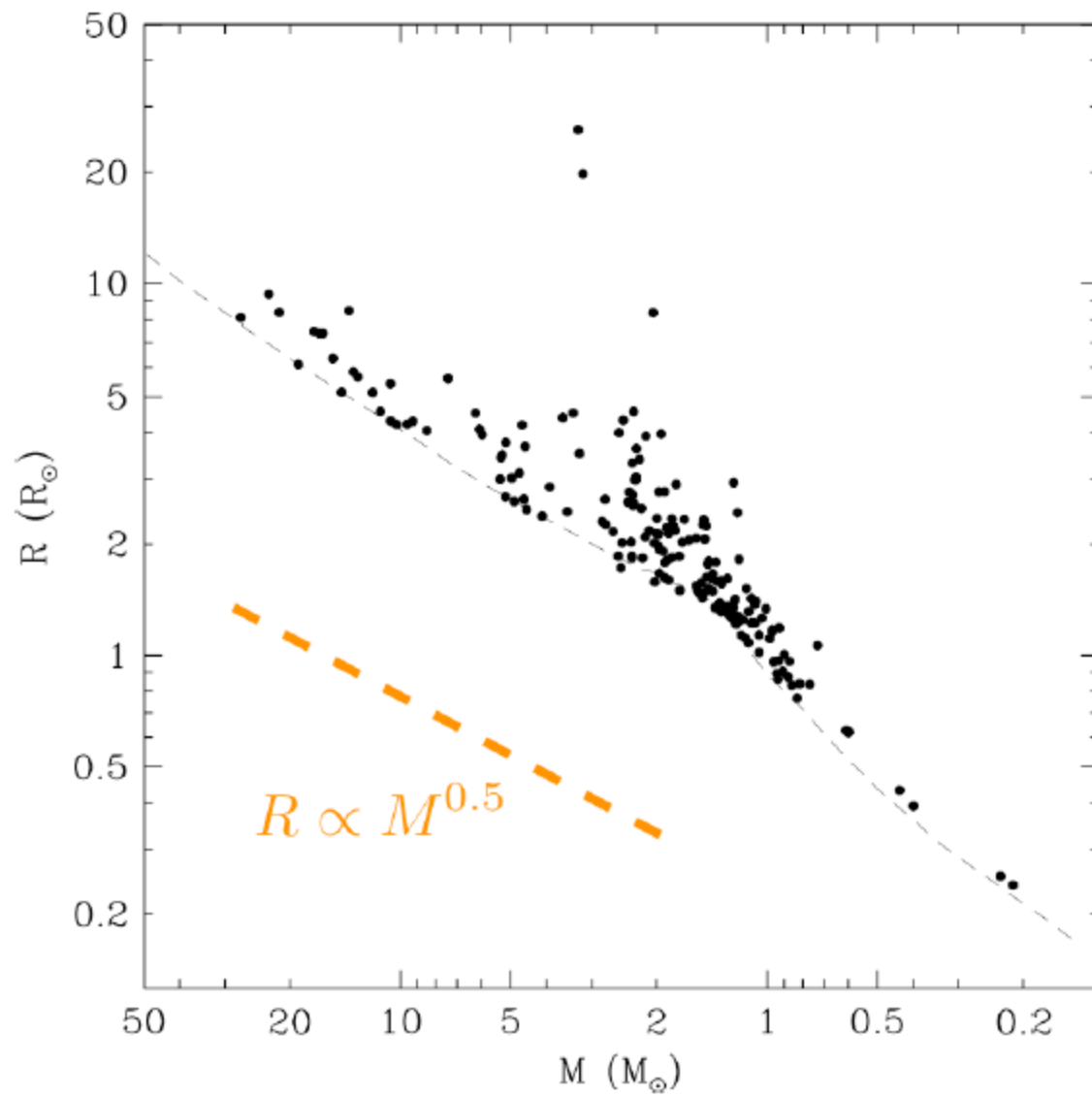


Empiryczna zależność masa-jasność dla 190 gwiazd z układów podwójnych (dokładność R, L, M – 3%)



M=1-2.5 M_⊙





Masa Jeansa

$$E_{\text{tot}} \simeq k_{\text{B}}T - \frac{GMm_{\text{u}}}{R}$$

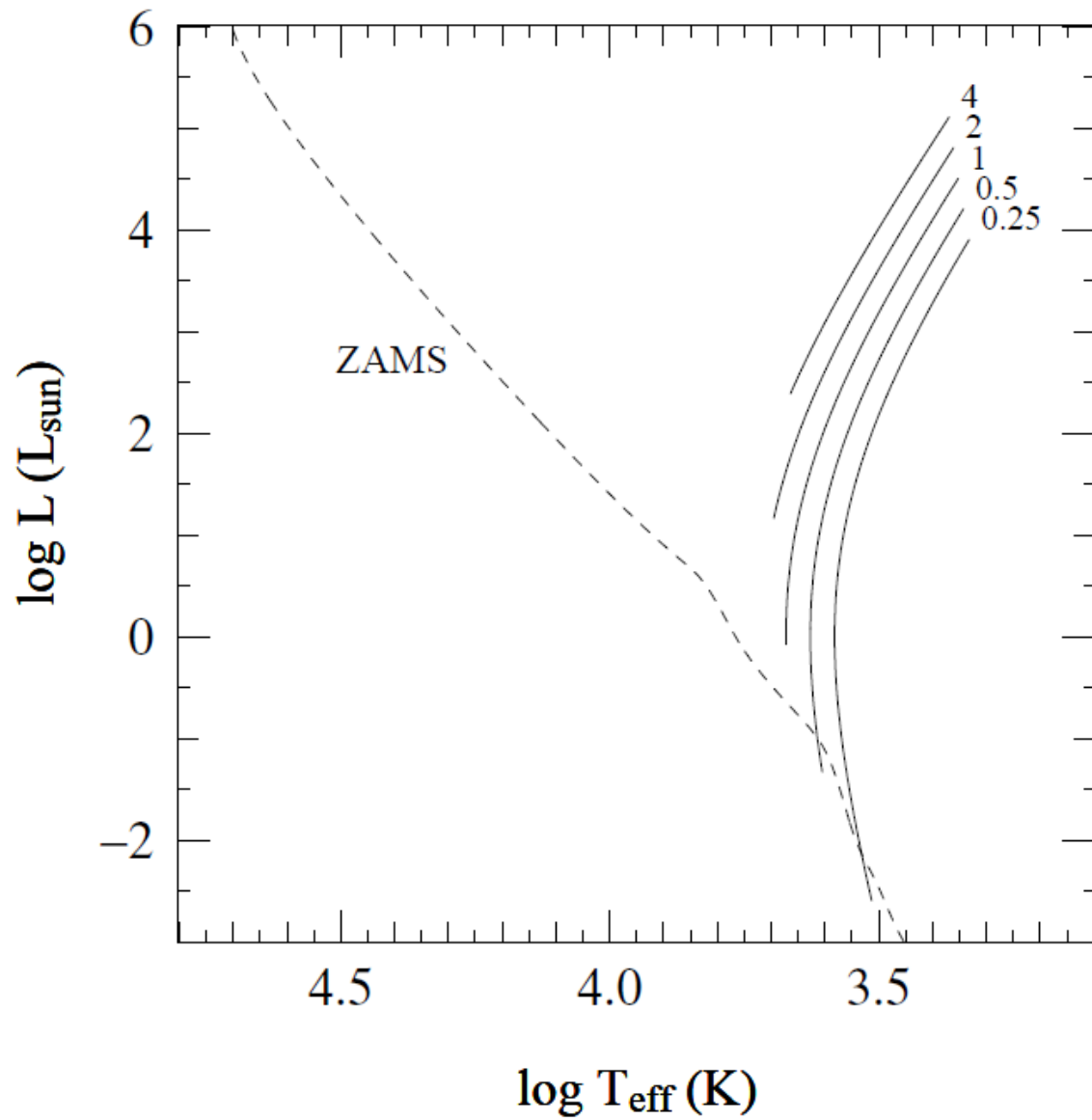
$$E_{\text{tot}} < 0,$$

$$M > M_{\text{J}} = \frac{4}{3}\pi\rho R_{\text{J}}^3 \simeq 5 \times 10^{-10} \left(\frac{T^3}{\rho} \right)^{1/2} M_{\odot}$$

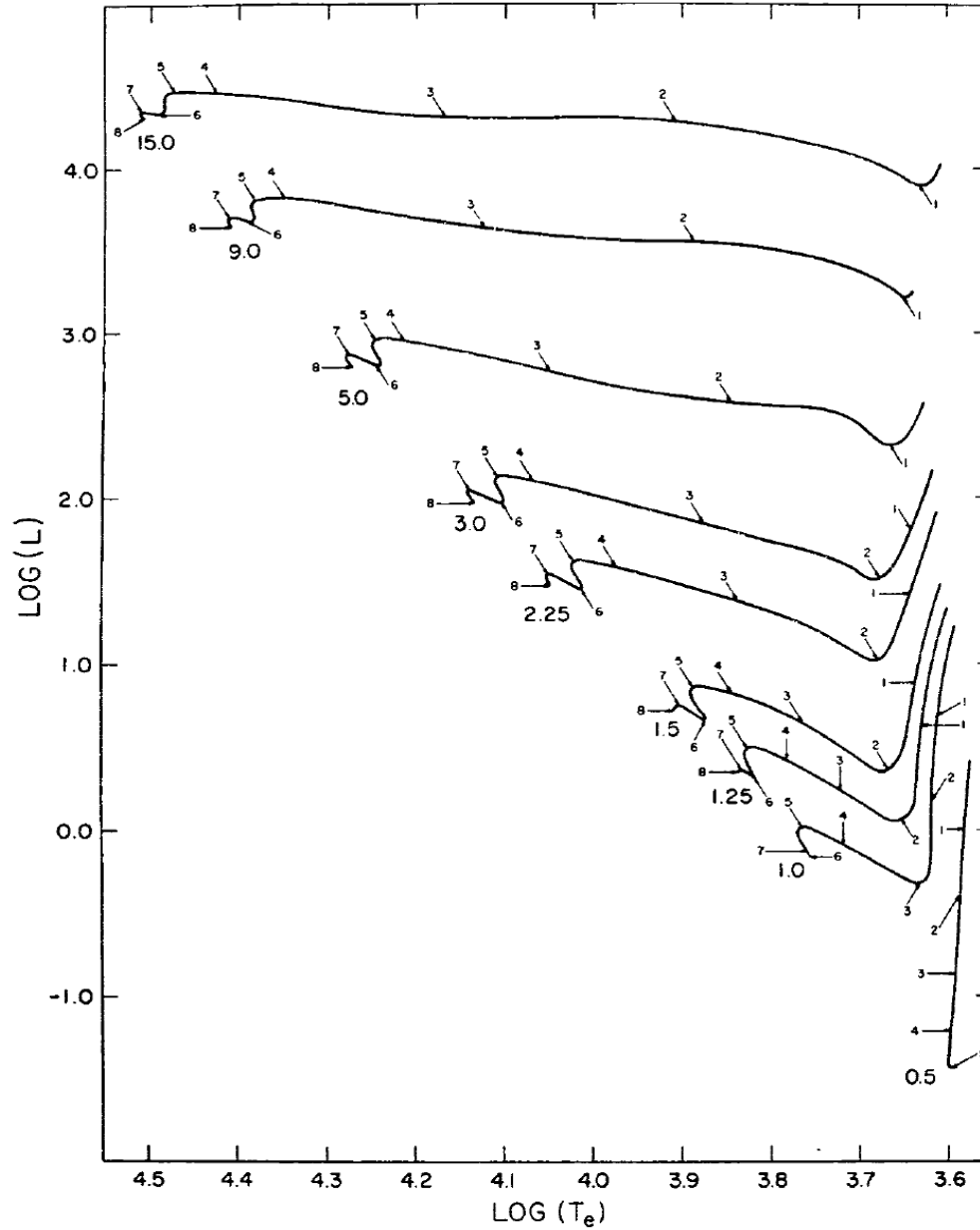
ρ [g/cm³]

$$T = 100 \text{ K}, \rho = 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{J}} \simeq 5 \times 10^4 M_{\odot}$$

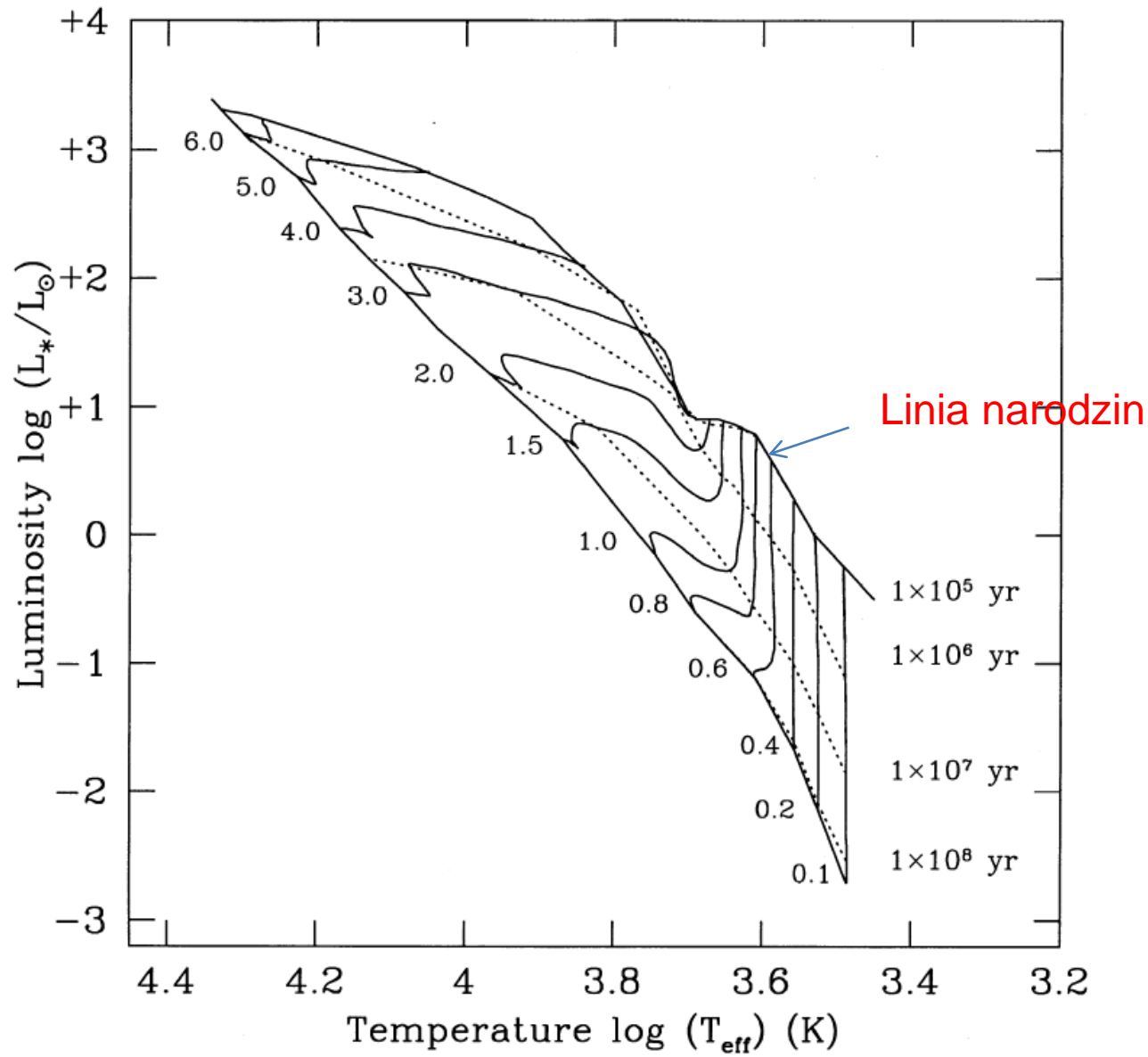
Ścieżki Hayashiego



Ewolucja przed MS



POINT	(M/M_{\odot})								
	15.0	9.0	5.0	3.0	2.25	1.5	1.25	1.0	0.5
1.....	6.740×10^2	1.443×10^3	2.936×10^4	3.420×10^4	7.862×10^4	2.347×10^5	4.508×10^5	1.189×10^6	3.195×10^6
2.....	3.766×10^3	1.473×10^4	1.069×10^5	2.078×10^5	5.940×10^6	2.363×10^6	3.957×10^6	1.058×10^6	1.786×10^6
3.....	9.350×10^3	3.645×10^4	2.001×10^5	7.633×10^5	1.883×10^6	5.801×10^6	8.800×10^6	8.910×10^6	8.711×10^6
4.....	2.203×10^4	6.987×10^4	2.860×10^5	1.135×10^6	2.505×10^6	7.584×10^6	1.155×10^7	1.821×10^7	3.092×10^7
5.....	2.657×10^4	7.922×10^4	3.137×10^4	1.250×10^6	2.818×10^6	8.620×10^6	1.404×10^7	2.529×10^7	1.550×10^8
6.....	3.984×10^4	1.019×10^5	3.880×10^5	1.465×10^6	3.319×10^6	1.043×10^7	1.755×10^7	3.418×10^7
7.....	4.585×10^4	1.195×10^5	4.559×10^5	1.741×10^6	3.993×10^6	1.339×10^7	2.796×10^7	5.016×10^7
8.....	6.170×10^4	1.505×10^5	5.759×10^5	2.514×10^6	5.855×10^6	1.821×10^7	2.954×10^7



Minimalna masa gwiazdy

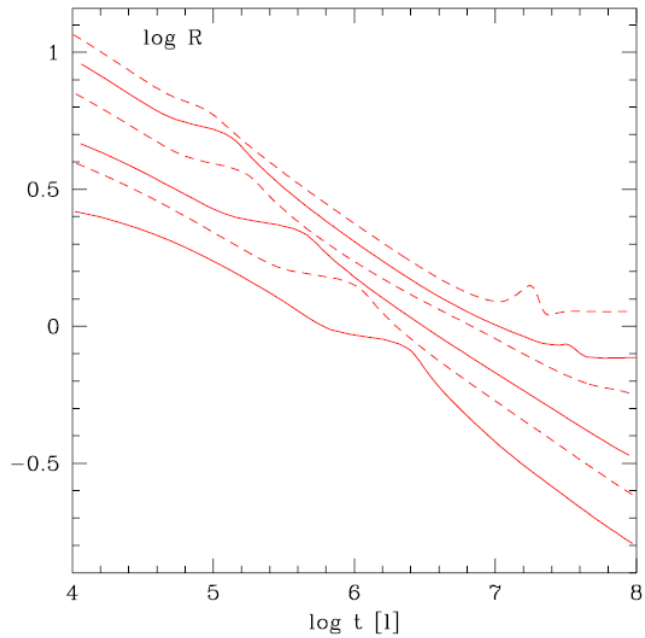
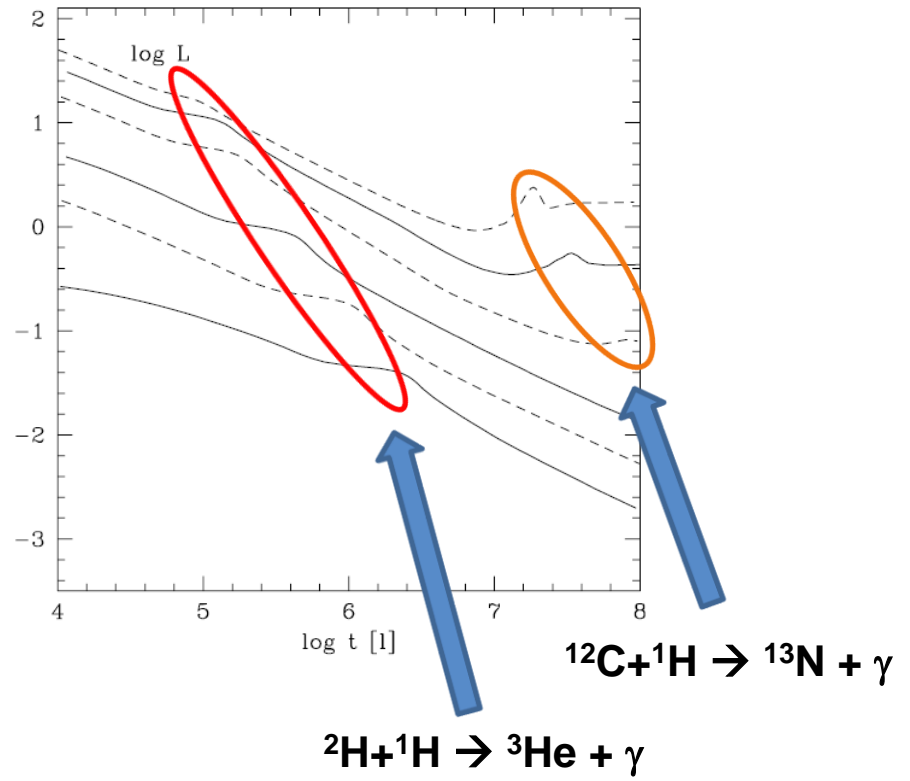
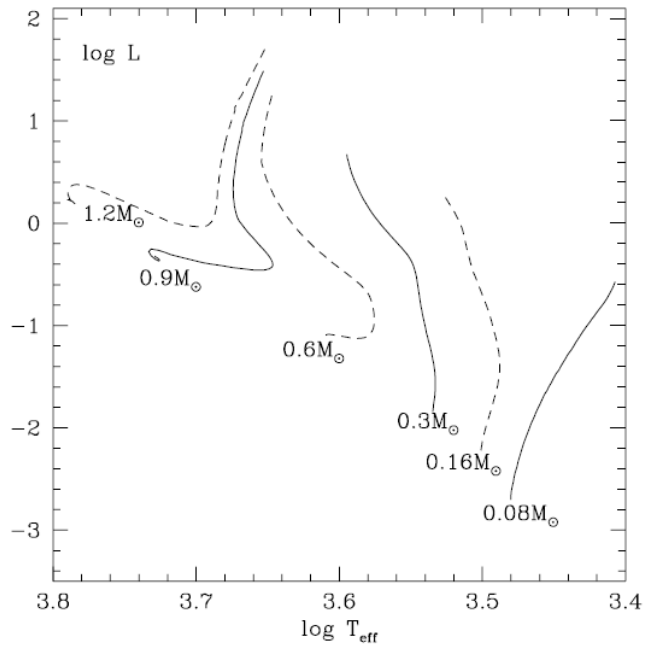
$$P_{\text{deg}} < P_{\text{gas}}$$

$$M/M_{\odot} \geq 0.039 T_c^{3/4} \mu_e^{-5/4} \mu^{-3/4}$$

$$X=0.7 \quad Z=0.02 \quad T_c=2 \cdot 10^6$$

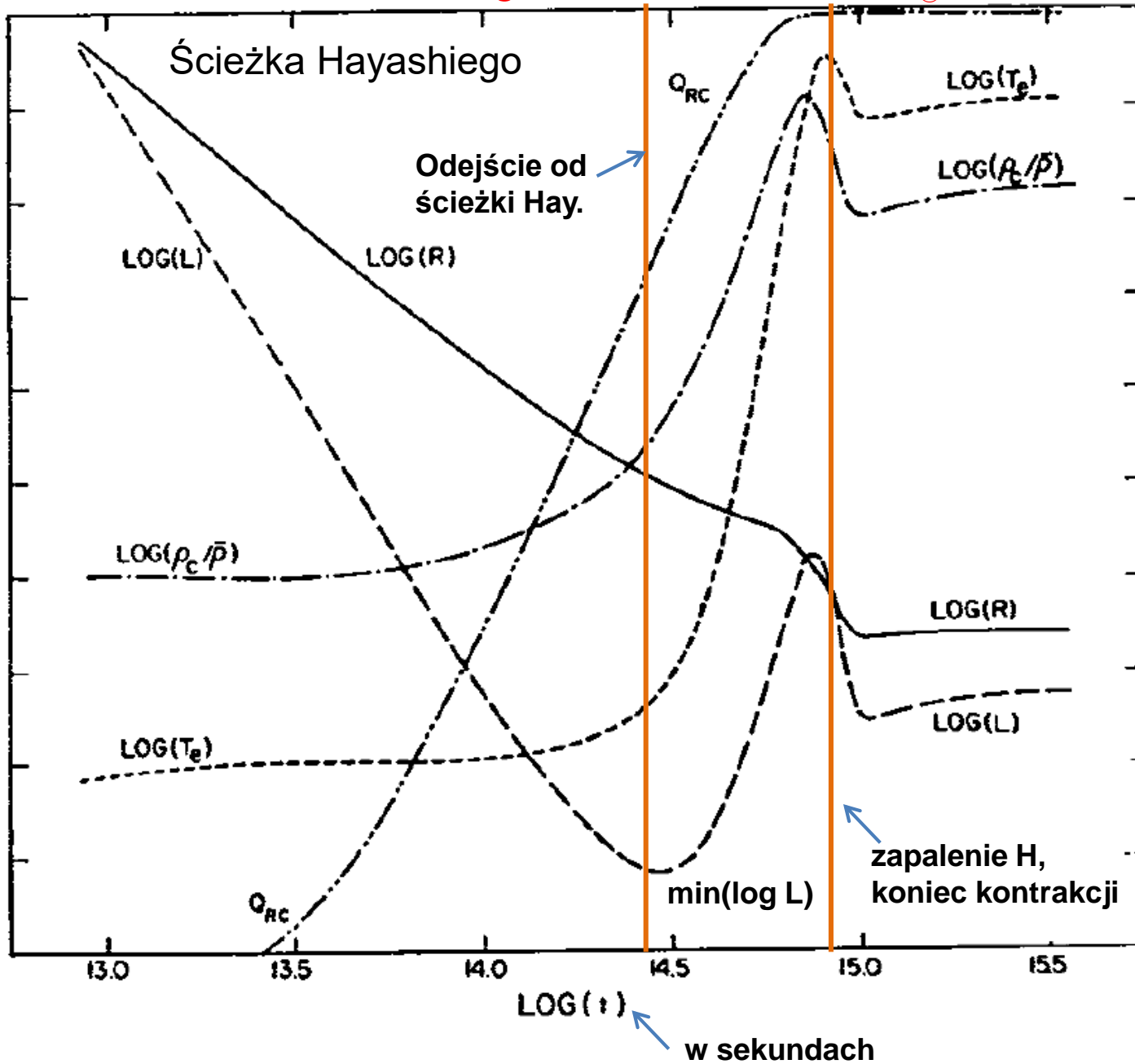
$$M/M_{\odot} \geq 0.08$$

Warunkiem, aby zostały zapoczątkowane reakcje jądrowe jest osiągnięcie dostatecznej temperatury przed degeneracją



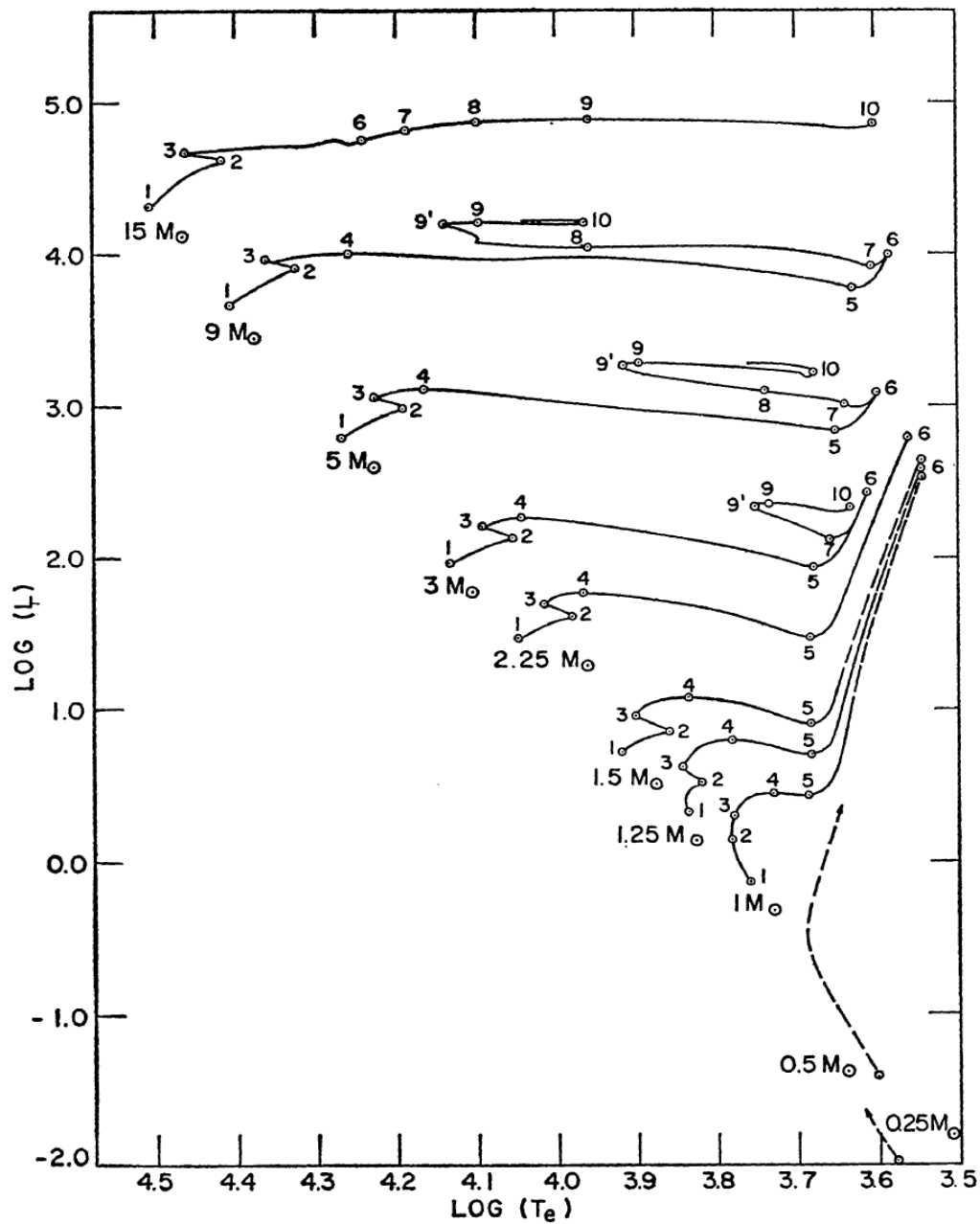
D'Antona & Mazzitelli 1998
 Dziembowski 2009

Diagram Iben dla $M=1M_{\odot}$



Iben 1965

Ewolucja na MS i po MS



Interval ($i-j$)					
	(1-2)	(2-3)	(3-4)	(4-5)	(5-6)
Mass (M_{\odot})					
15	1.010 (7)	2.270 (5)		7.55 (4)	
9	2.144 (7)	6.053 (5)	9.113 (4)	1.477 (5)	6.552 (4)
5	6.547 (7)	2.173 (6)	1.372 (6)	7.532 (5)	4.857 (5)
3	2.212 (8)	1.042 (7)	1.033 (7)	4.505 (6)	4.238 (6)
2.25	4.802 (8)	1.647 (7)	3.696 (7)	1.310 (7)	3.829 (7)
1.5	1.553 (9)	8.10 (7)	3.490 (8)	1.049 (8)	≥ 2 (8)
1.25	2.803 (9)	1.824 (8)	1.045 (9)	1.463 (8)	≥ 4 (8)
1.0	7 (9)	2 (9)	1.20 (9)	1.57 (8)	≥ 1 (9)

Interval ($i-j$)				
	(6-7)	(7-8)	(8-9)	(9-10)
Mass (M_{\odot})				
15	7.17 (5)	6.20 (5)	1.9 (5)	3.5 (4)
9	4.90 (5)	9.50 (4)	3.28 (6)	1.55 (5)
5	6.05 (6)	1.02 (6)	9.00 (6)	9.30 (5)
3	2.51 (7)		4.08 (7)	6.00 (6)

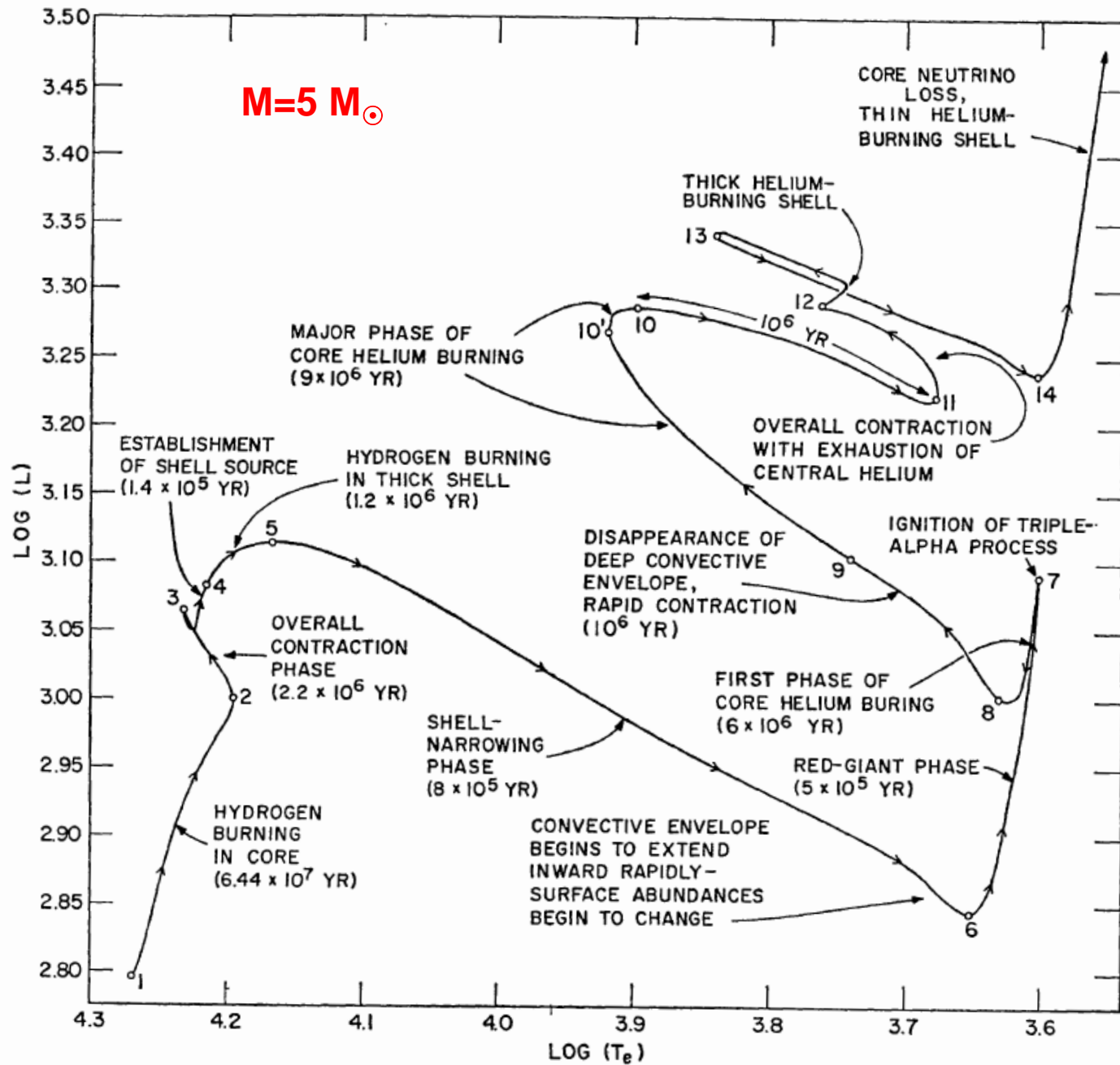
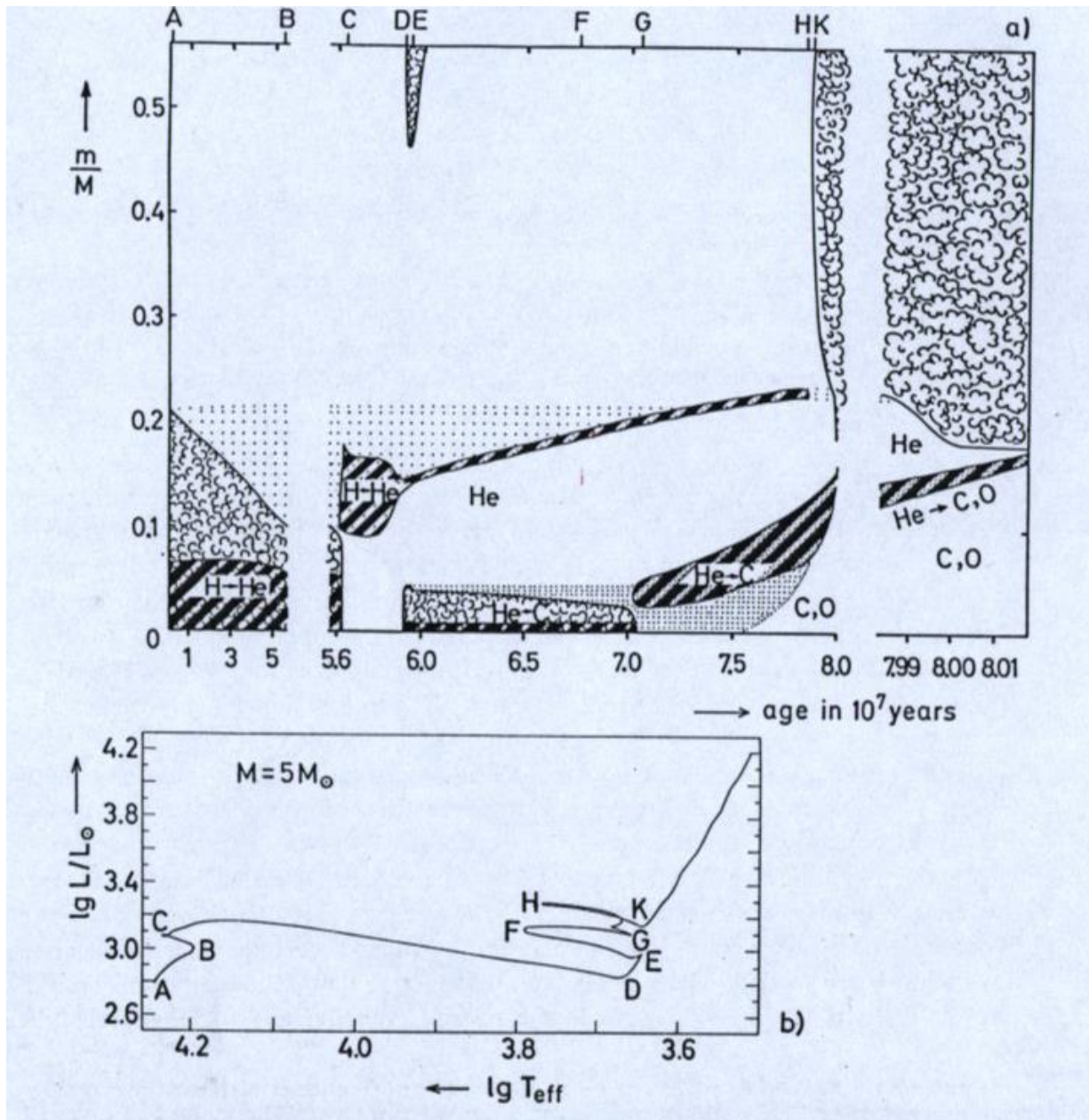
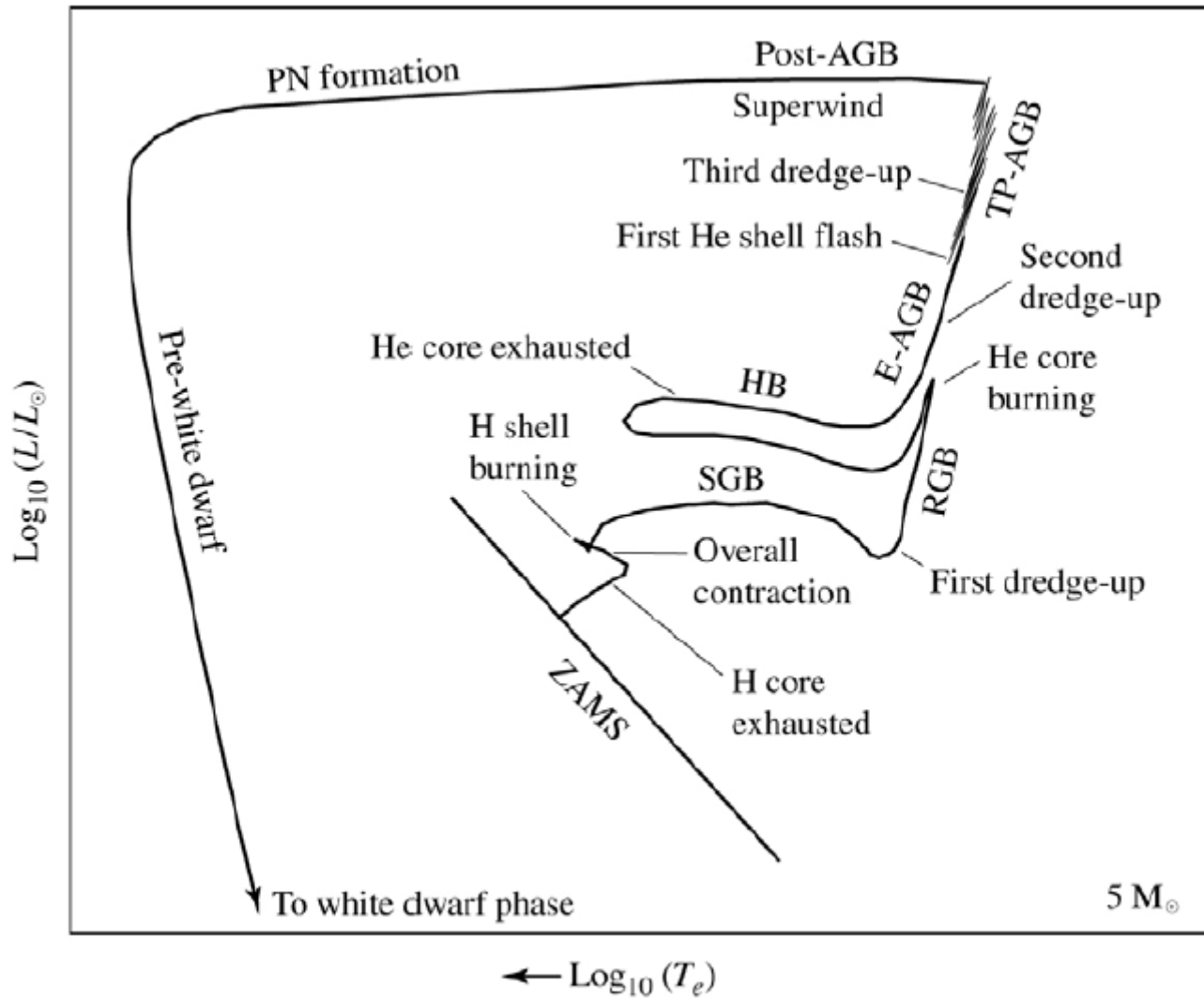


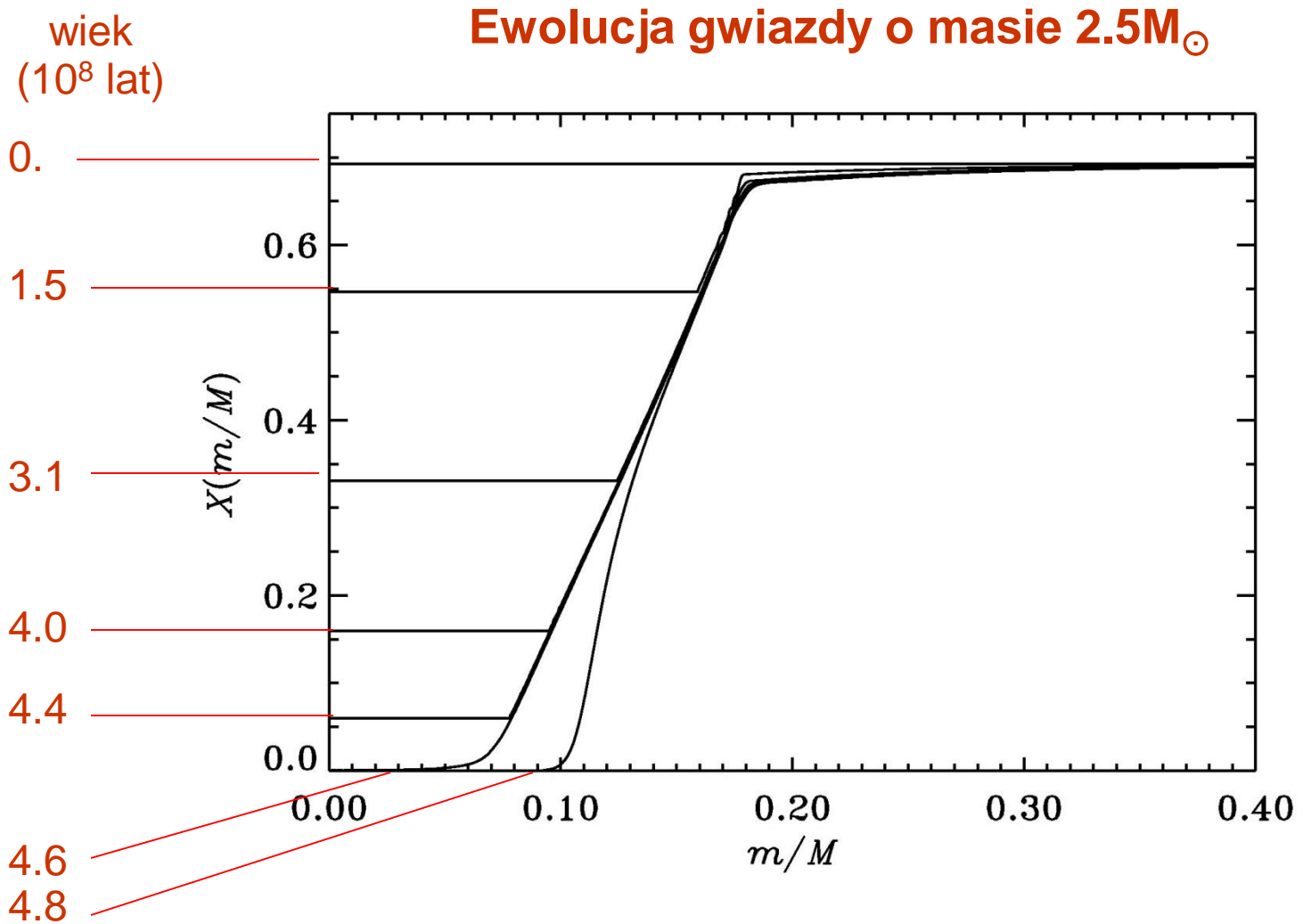
Diagram Kippenhahna dla $M=5M_{\odot}$

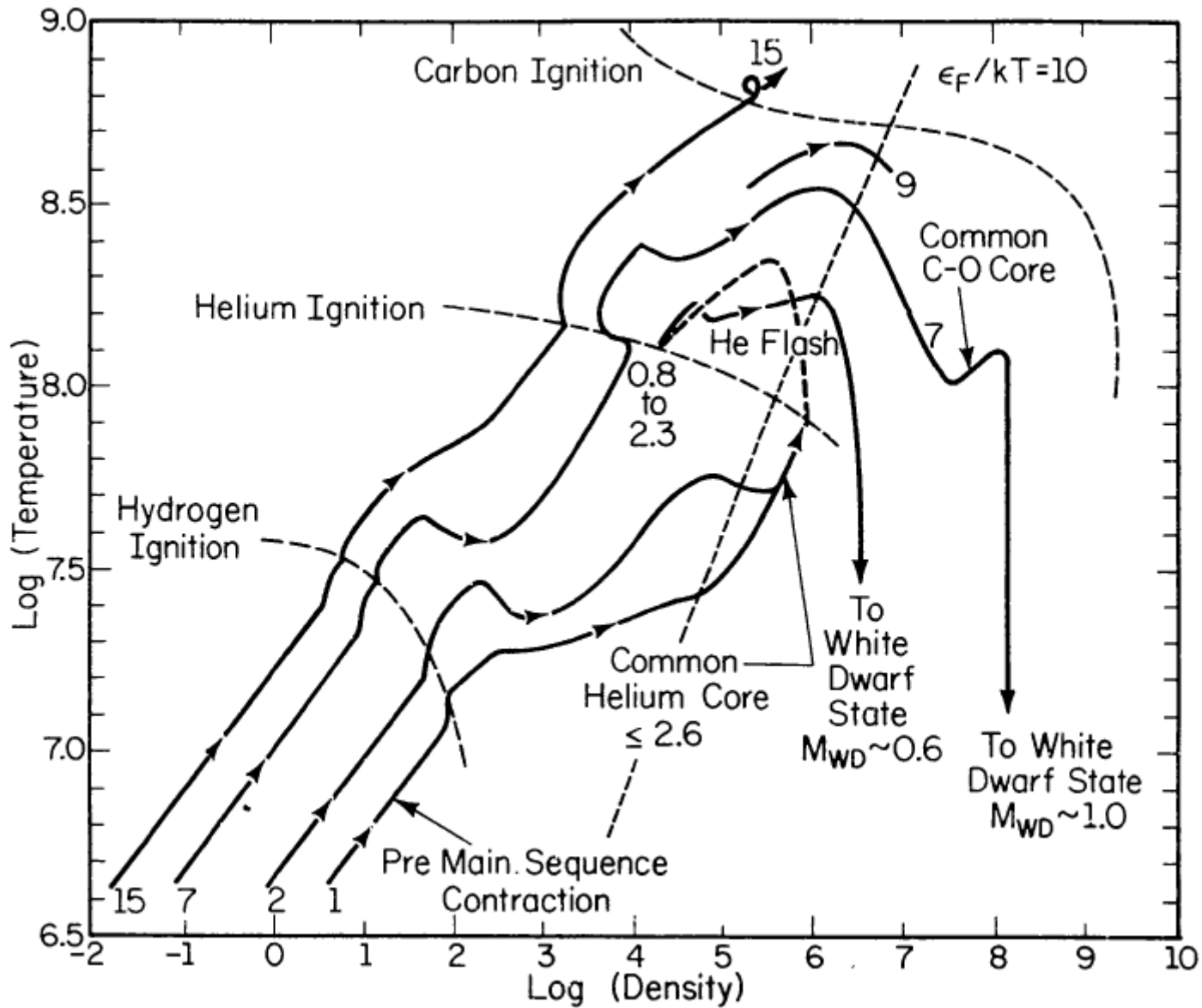


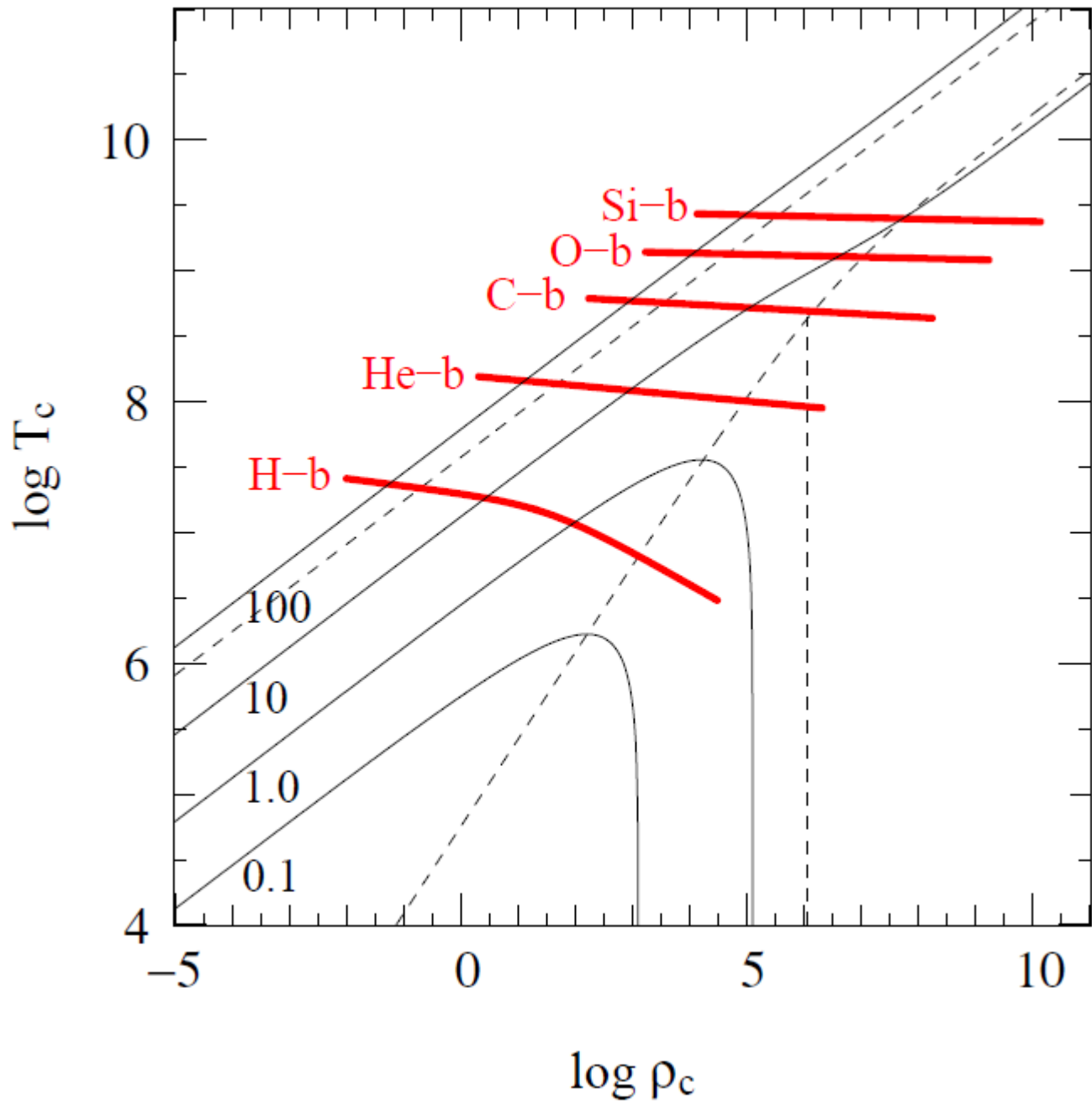
Schemat ewolucji gwiazdy o masie $5M_{\odot}$



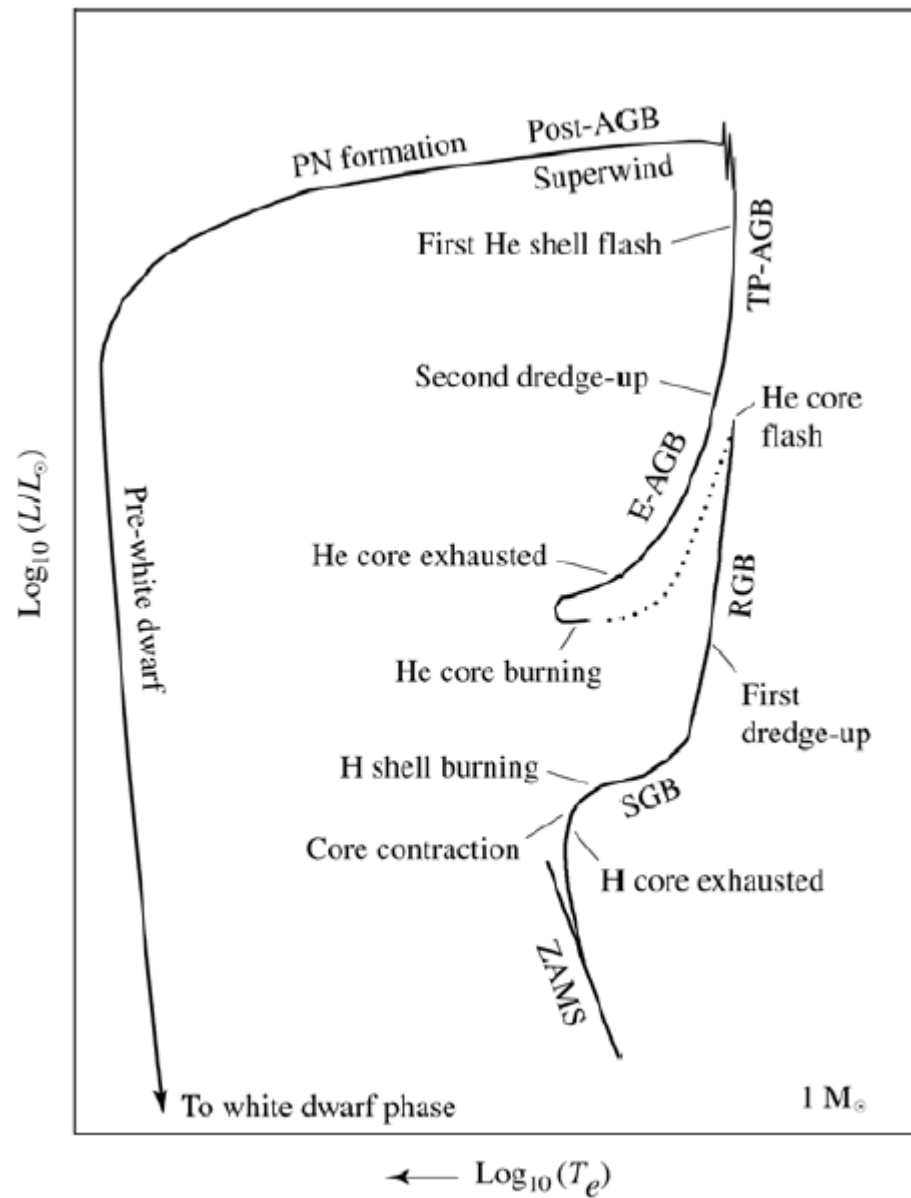
Zmiana profilu obfitości wodoru



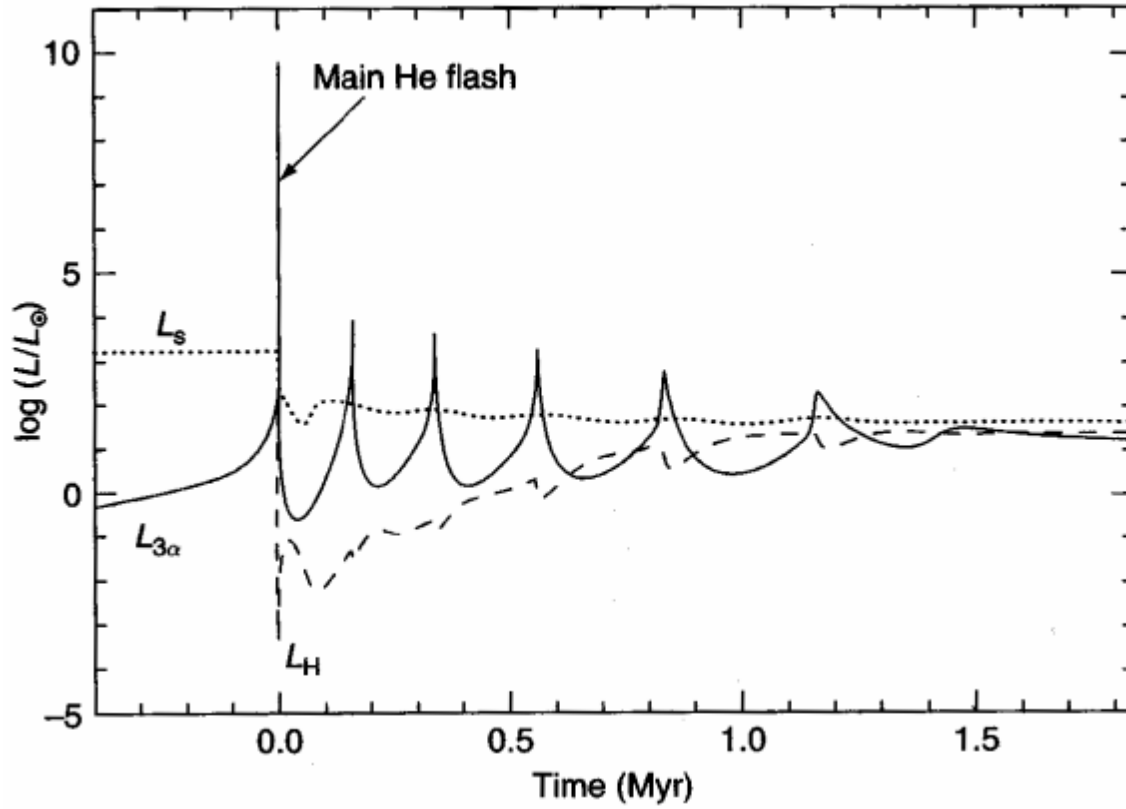




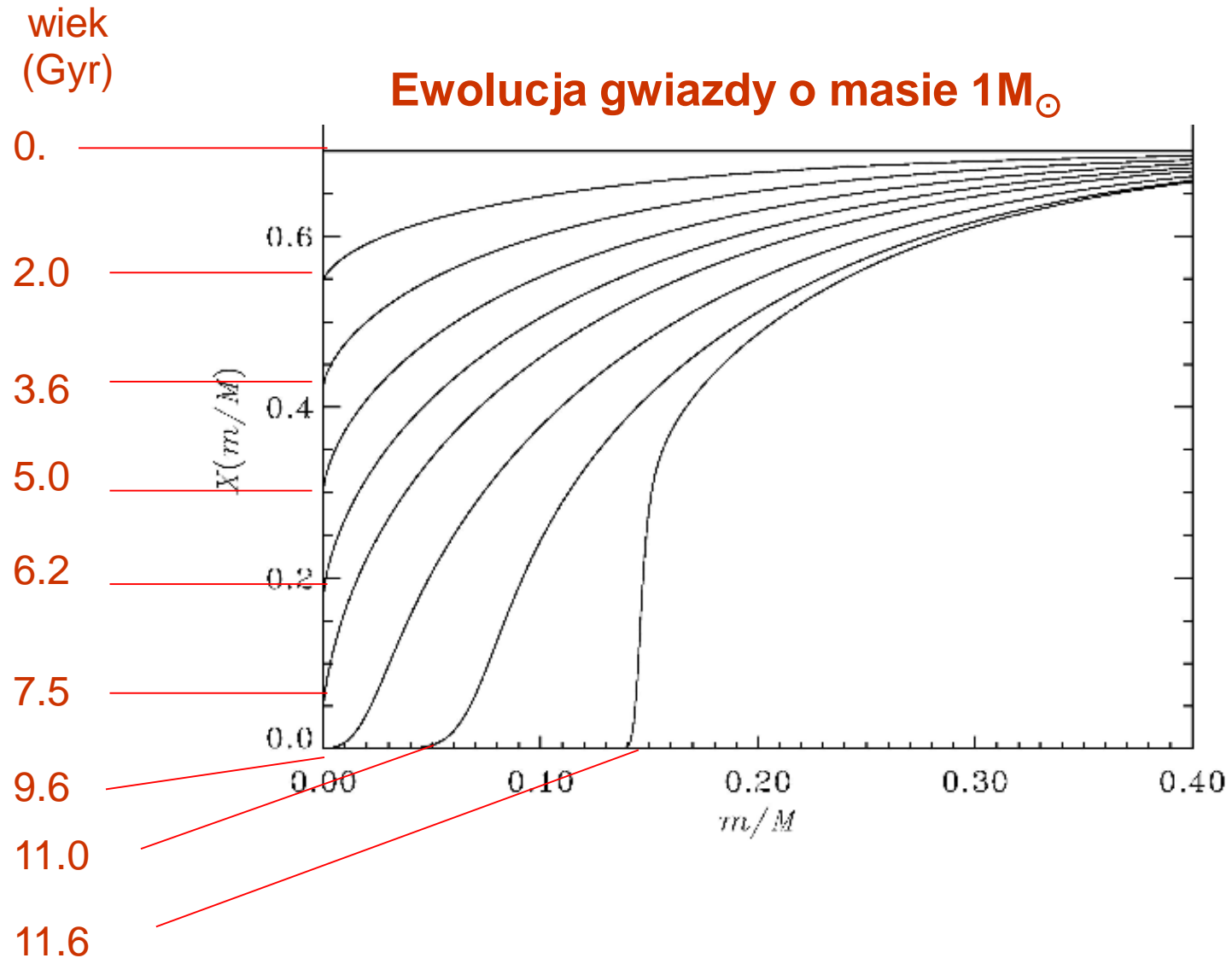
Schemat ewolucji gwiazdy o masie $1M_{\odot}$

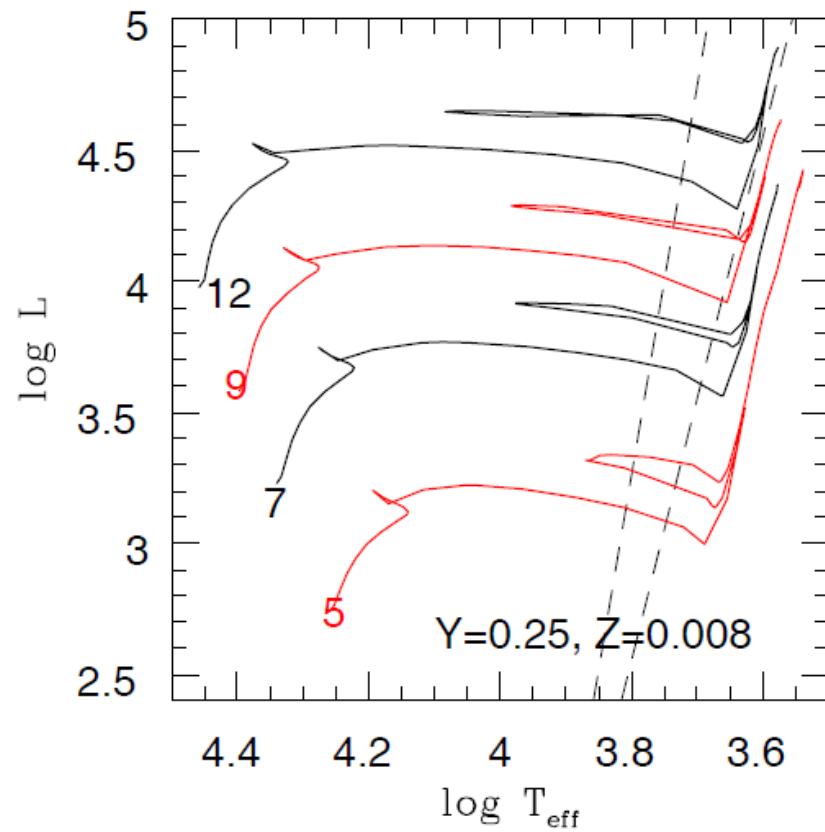
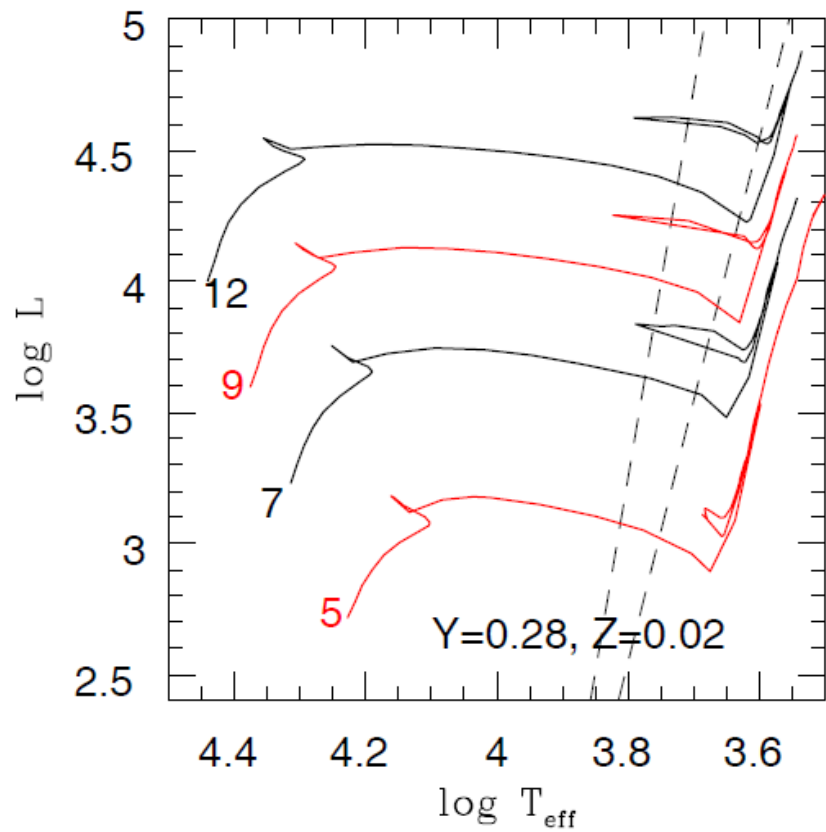


Błysk helowy $M=1M_{\odot}$

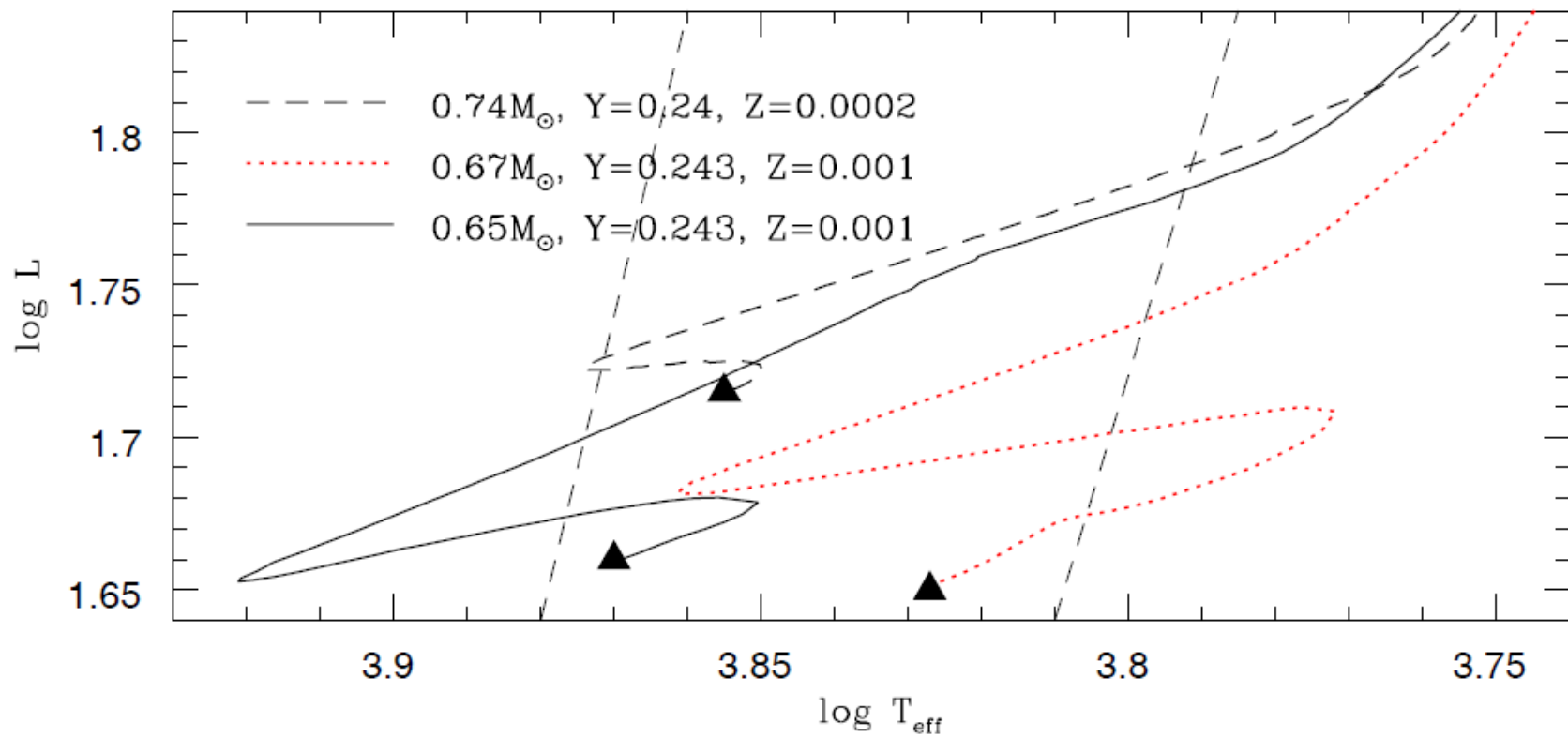


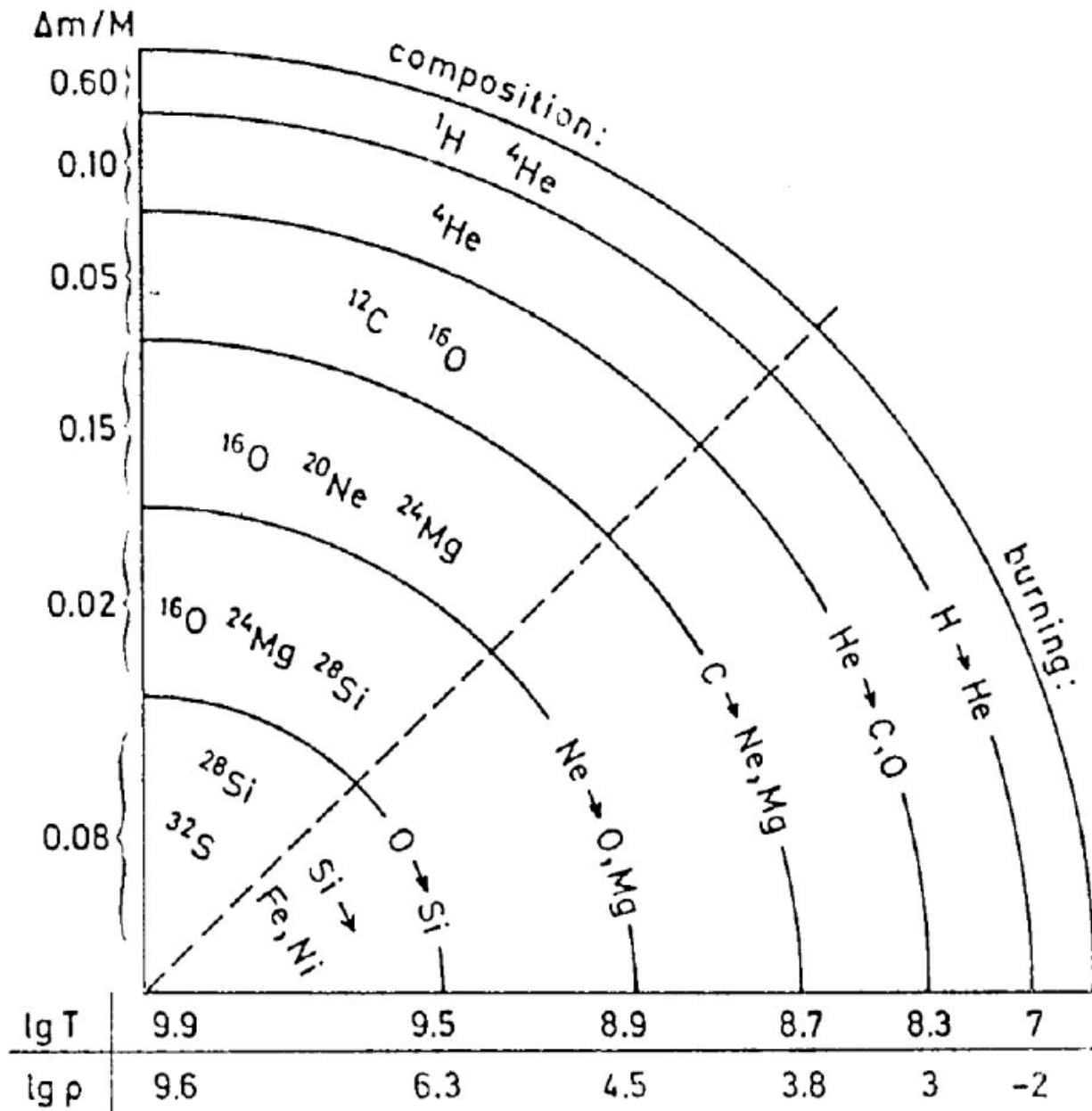
Zmiana profilu obfitości wodoru

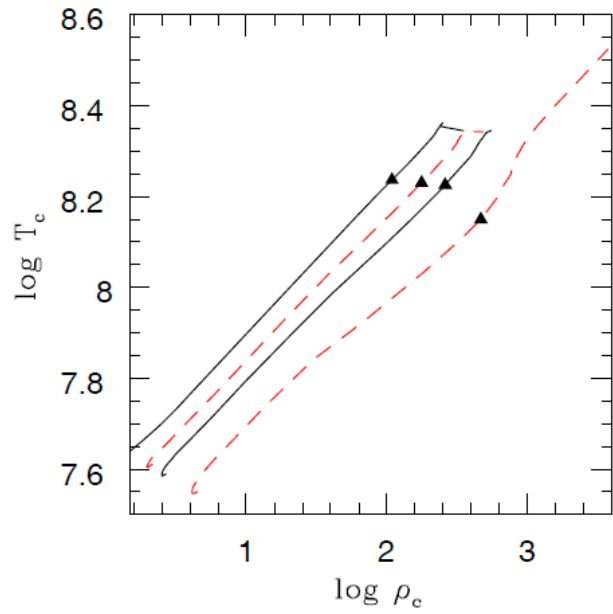
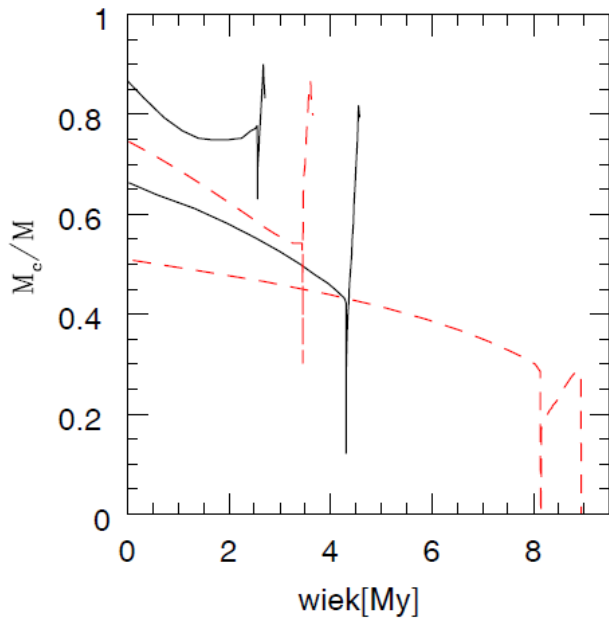
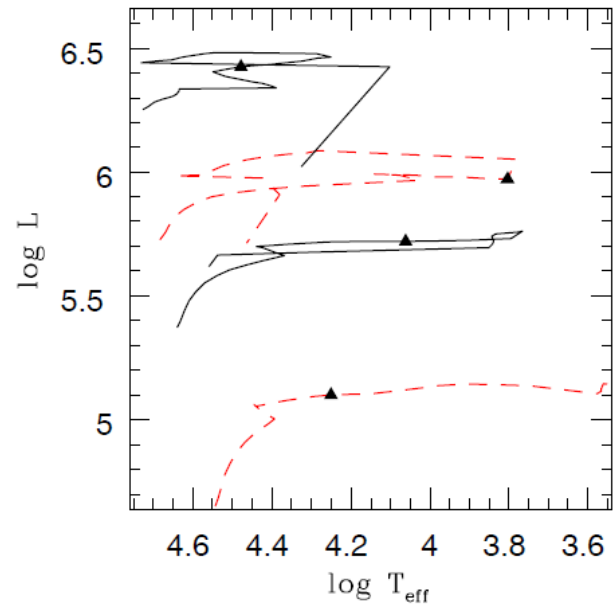
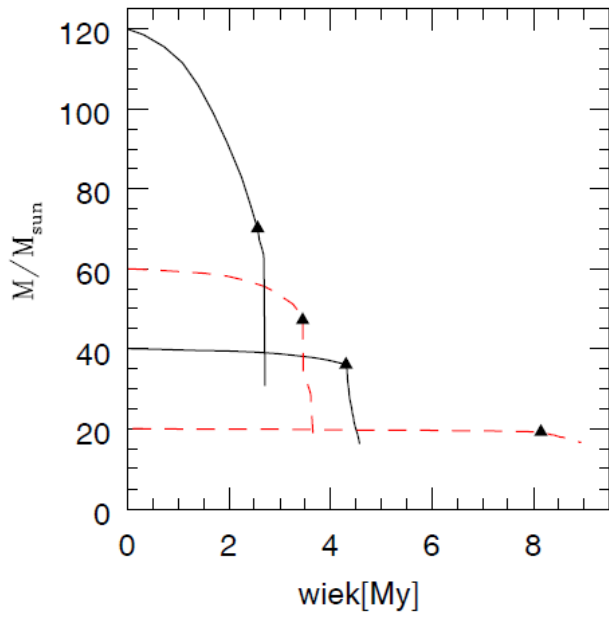


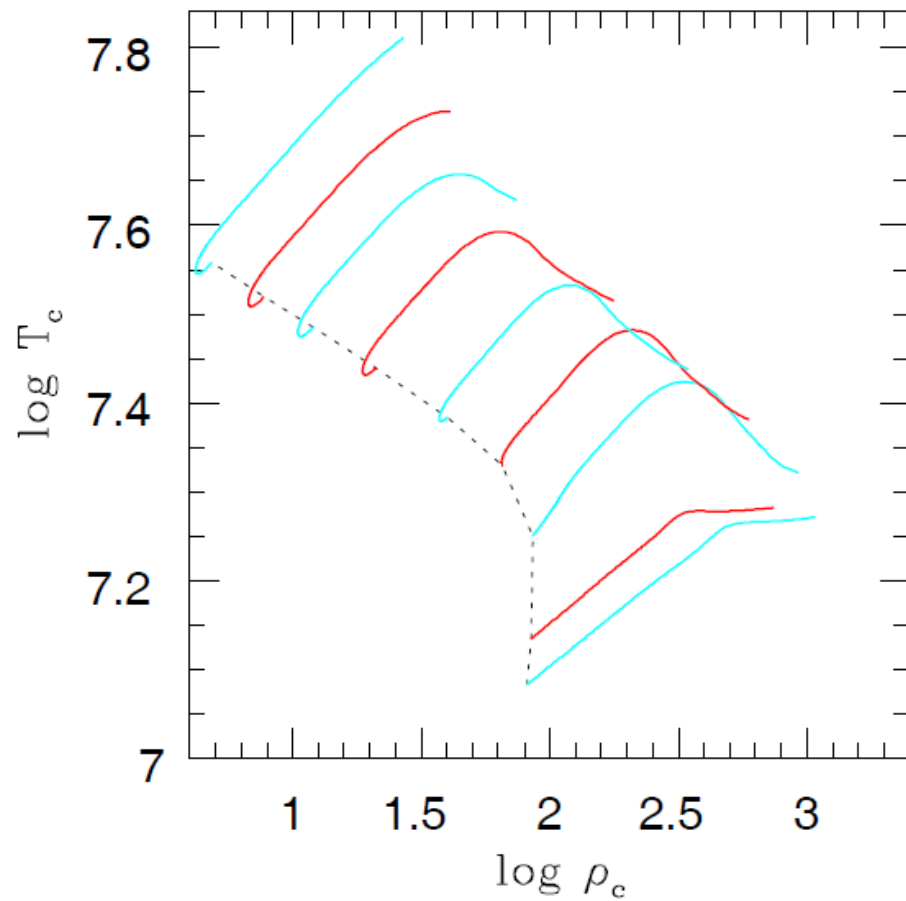
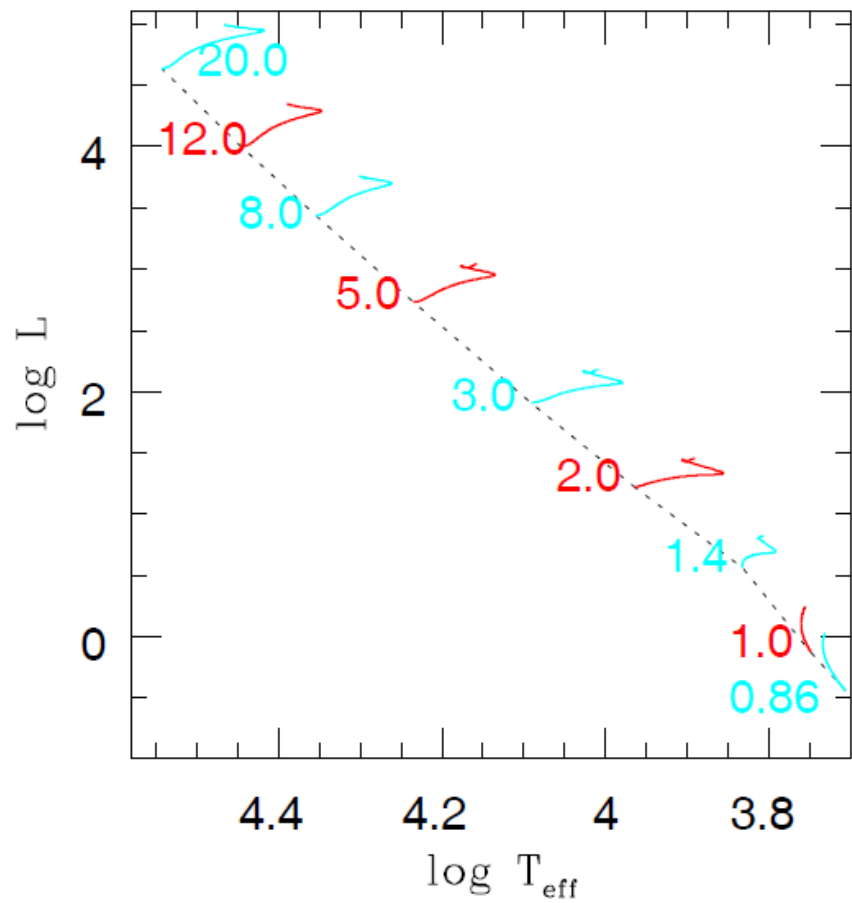


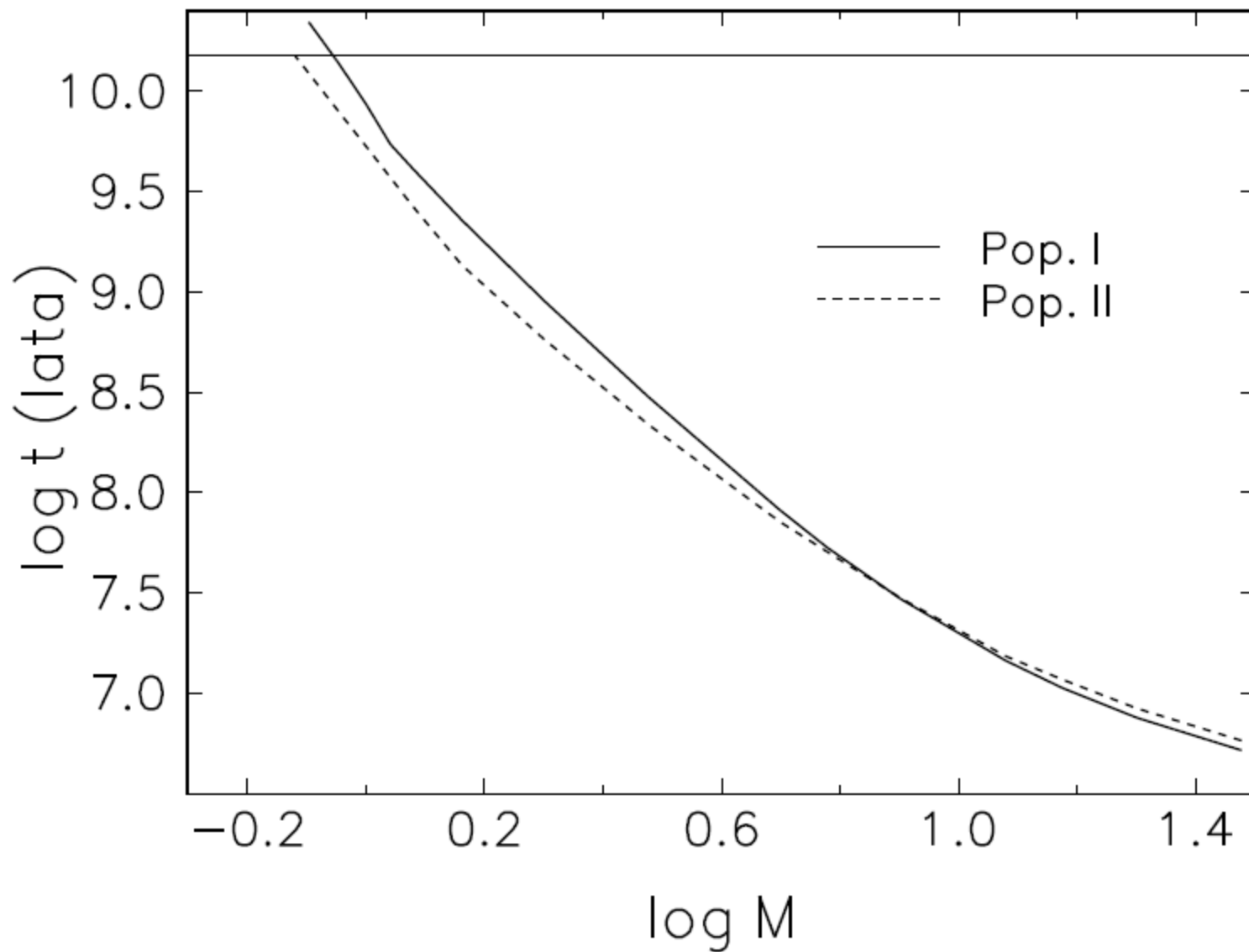
M/M_{\odot}	τ_{MS}	τ_{HG}	τ_{HeB}	red	blue
5	105.0	0.140	9.38	0.44	0.43
7	52.3	0.060	3.76	0.53	0.41
9	32.4	0.046	1.98	0.54	0.40
12	19.8	0.018	1.19	0.41	0.48

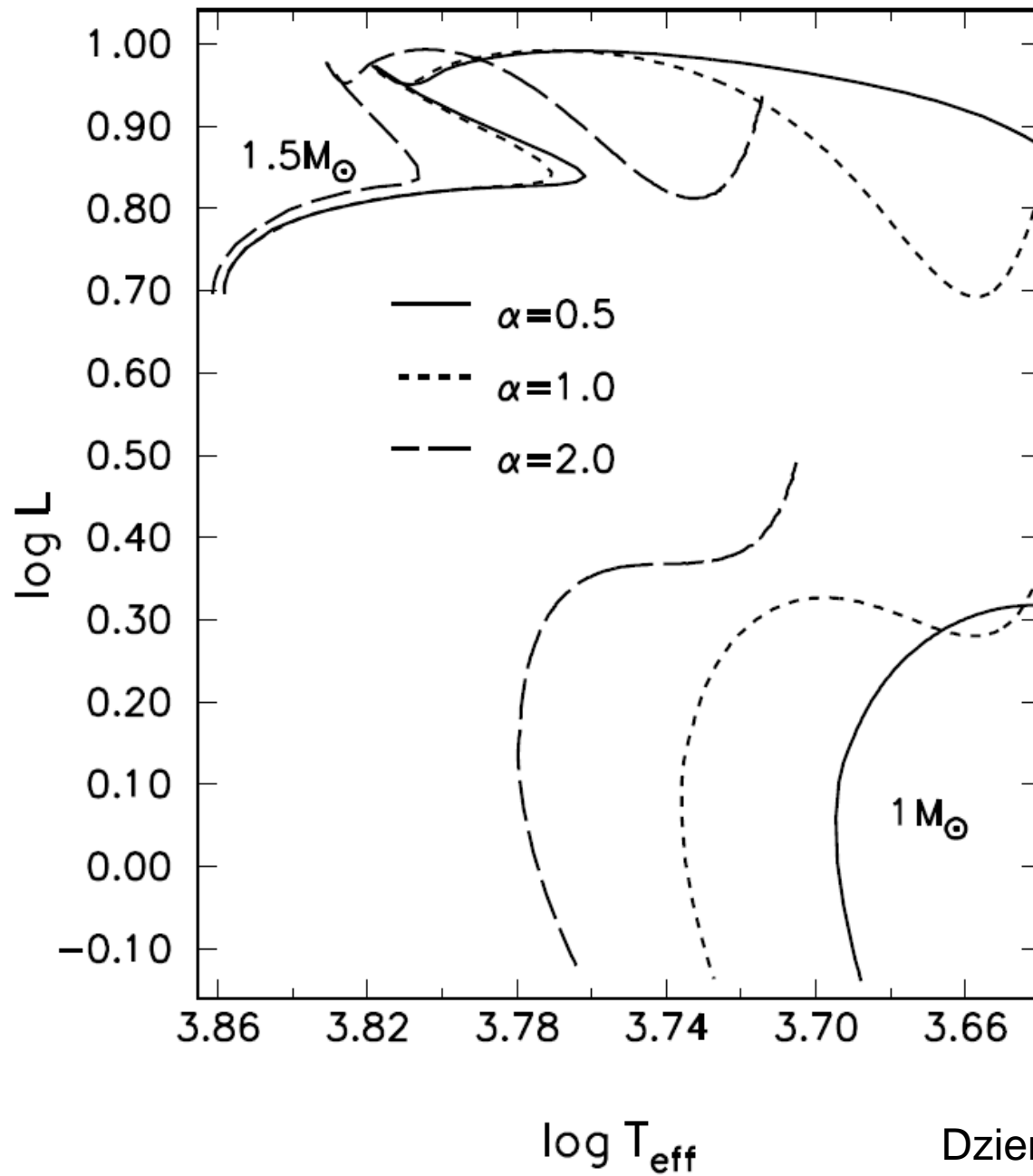


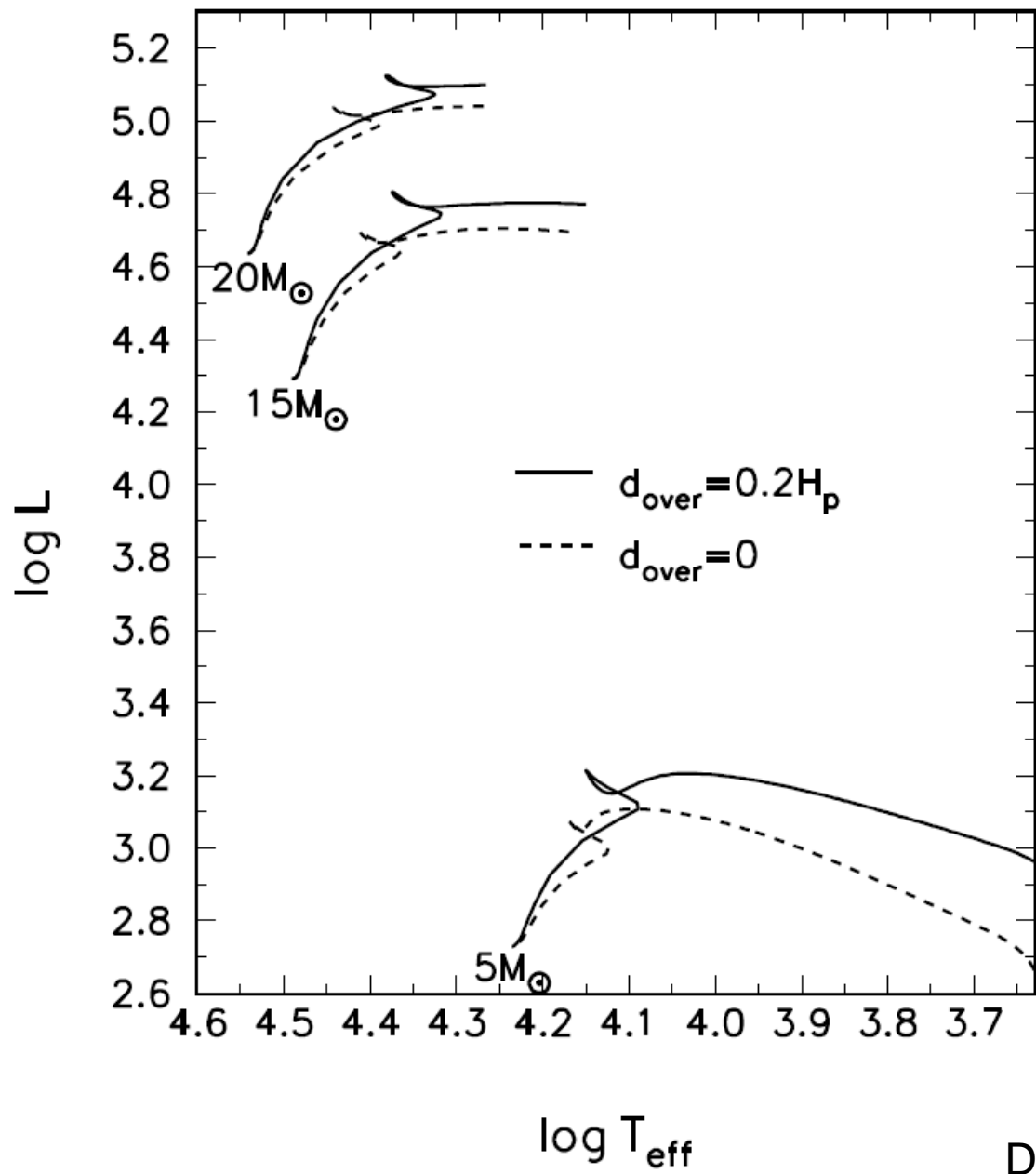


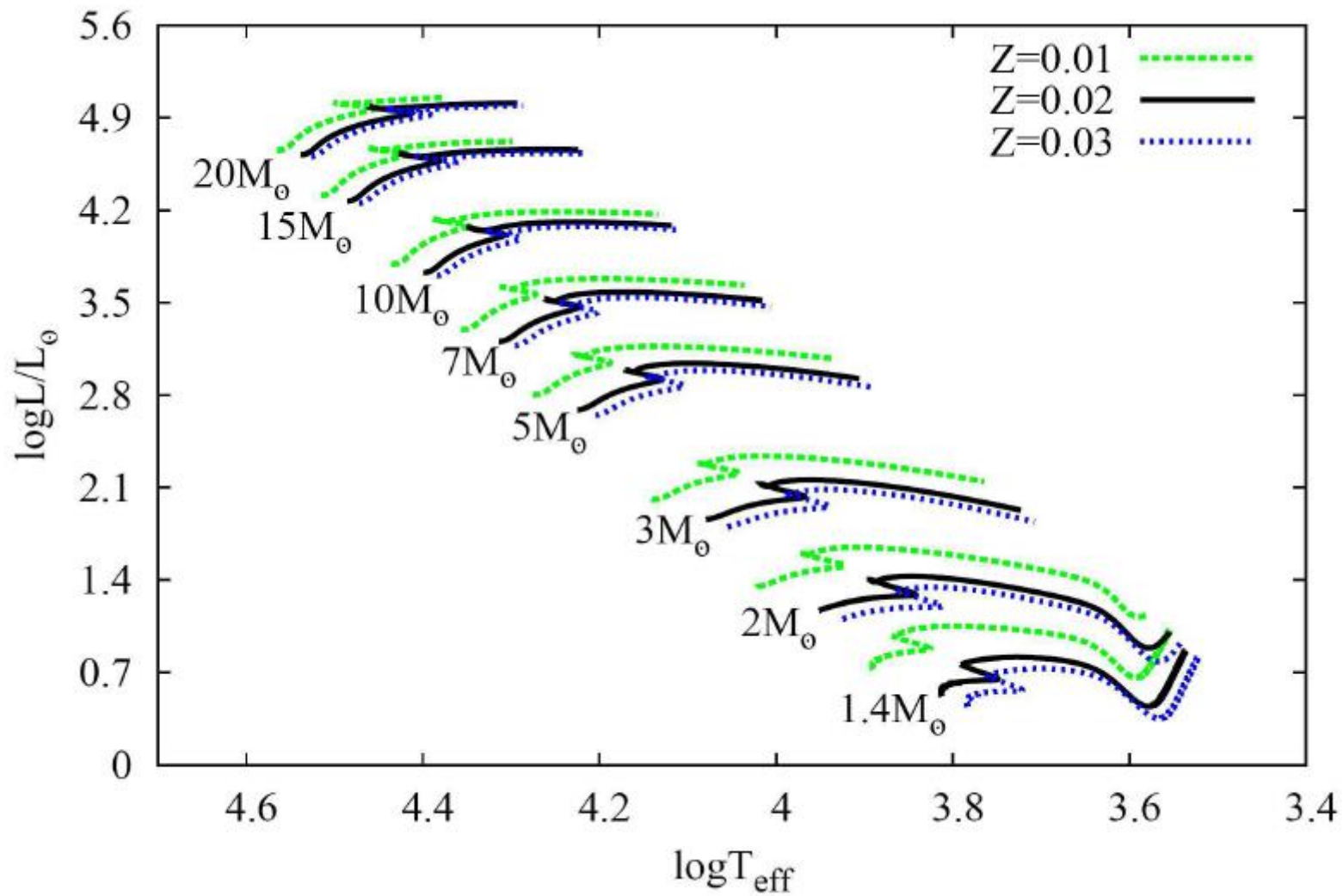


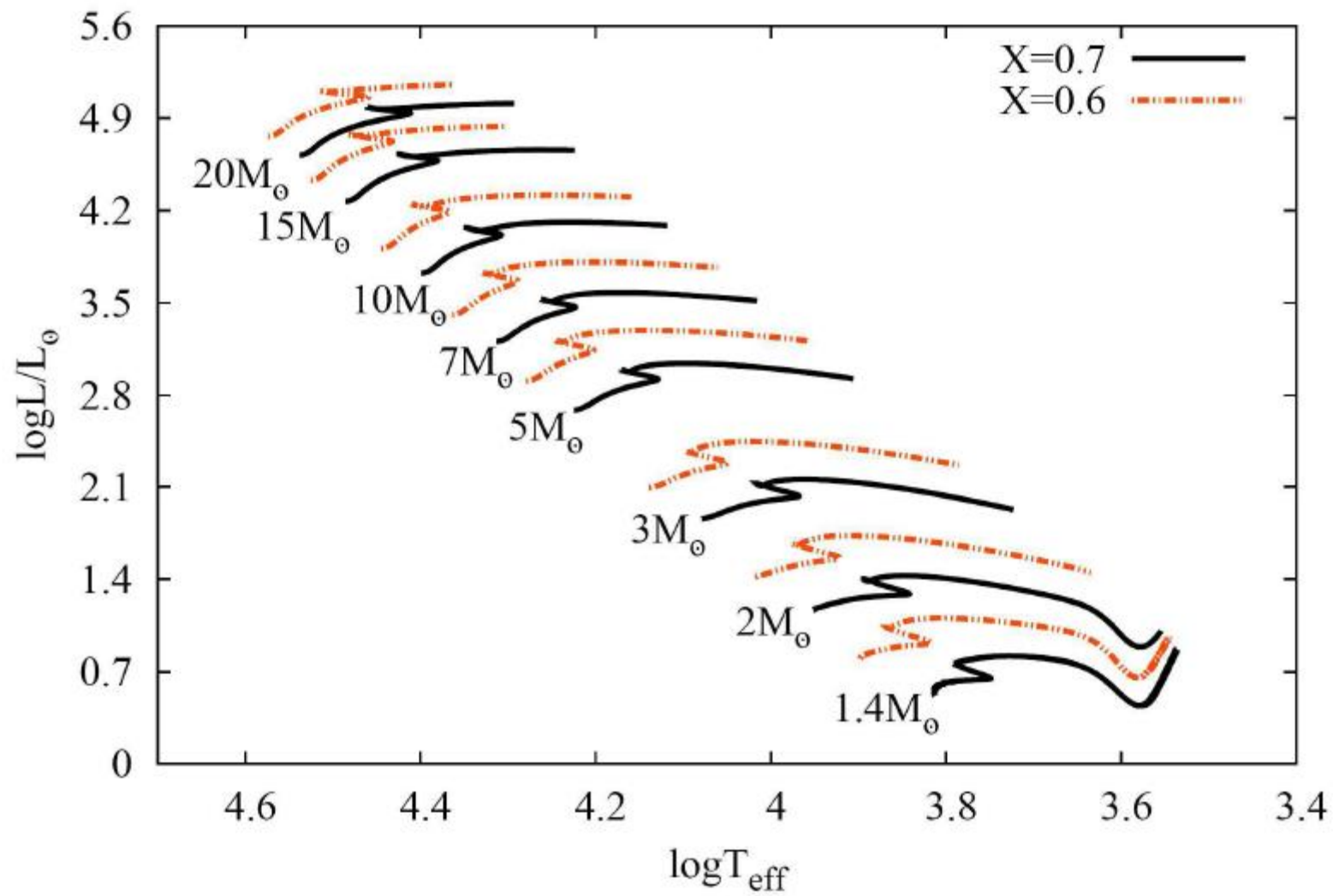




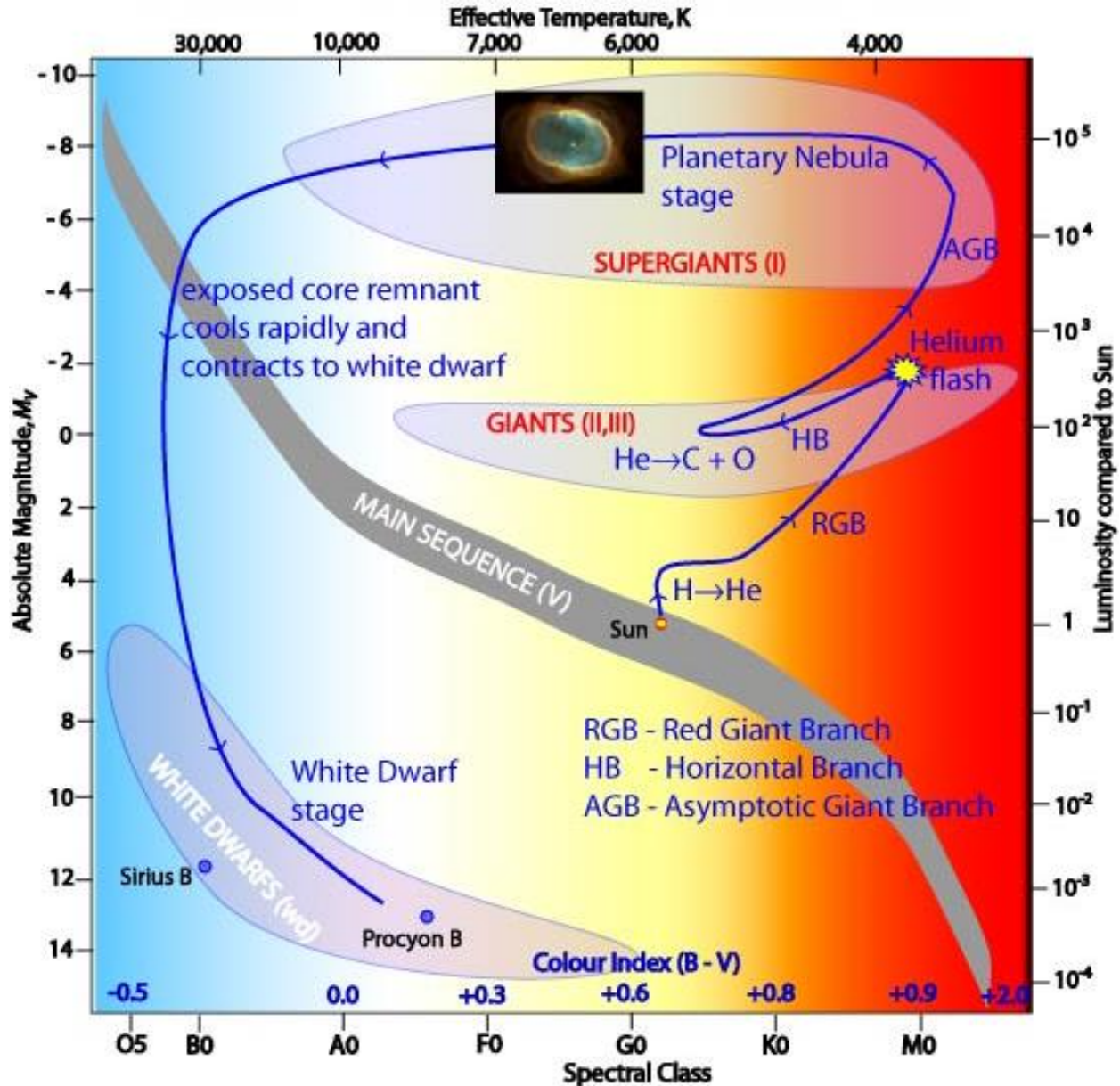




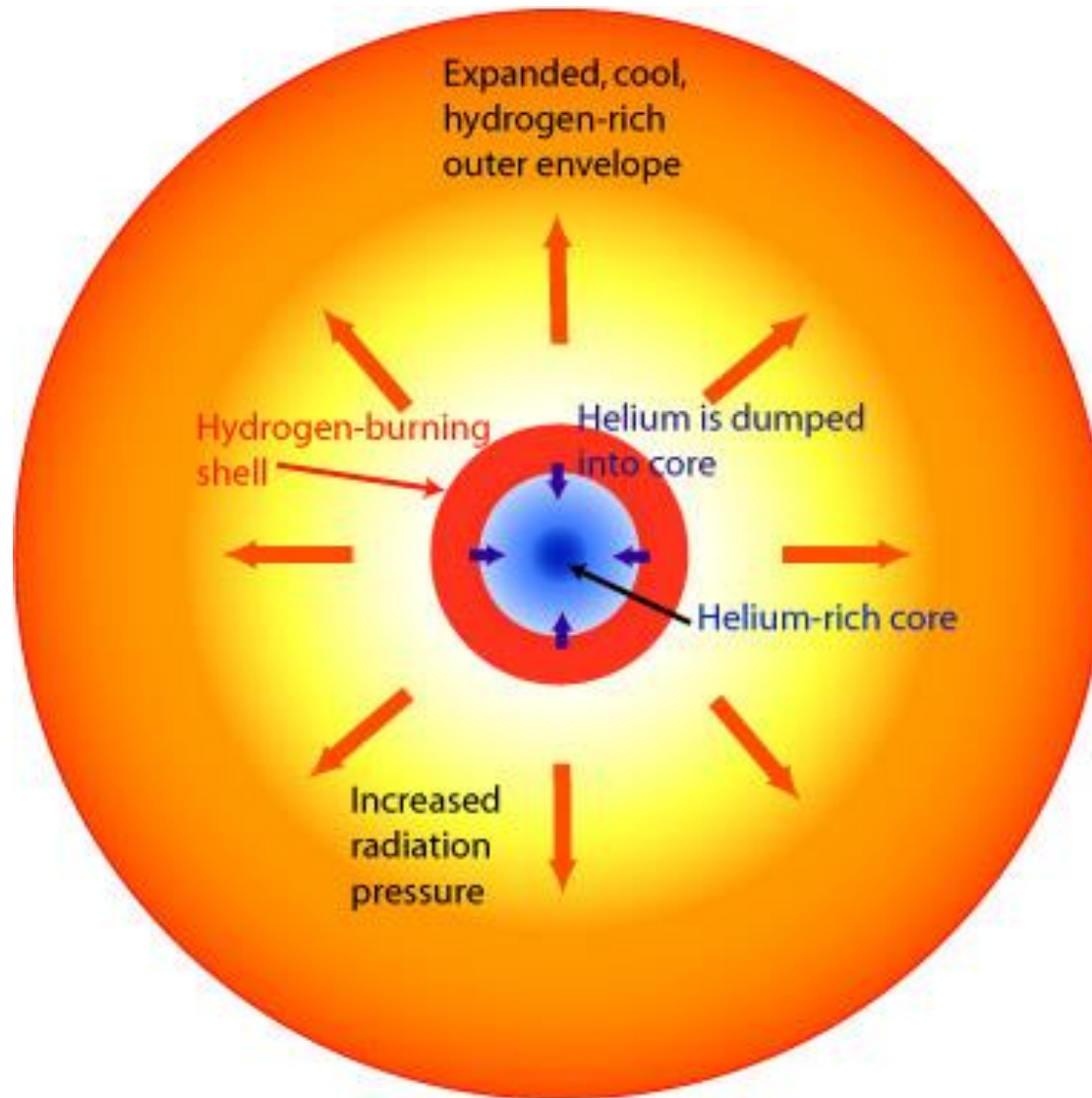




Ewolucja gwiazdy o masie $1M_{\odot}$



Czerwony olbrzym



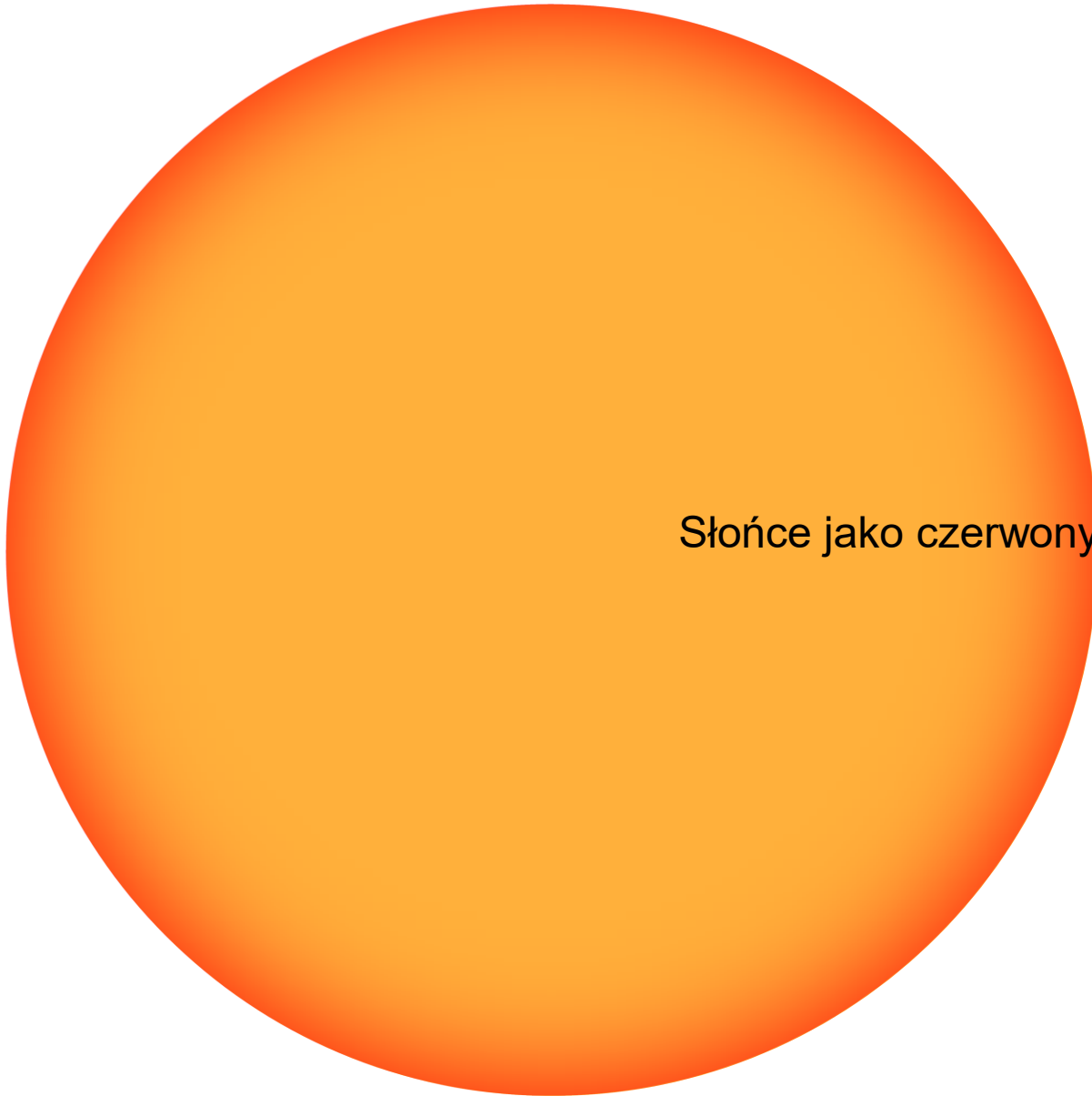
Hydrogen Shell Burning on the Red Giant Branch

$$L \sim (1-\beta)M_c$$

$$(1-\beta) = P_{\text{rad}}/P$$

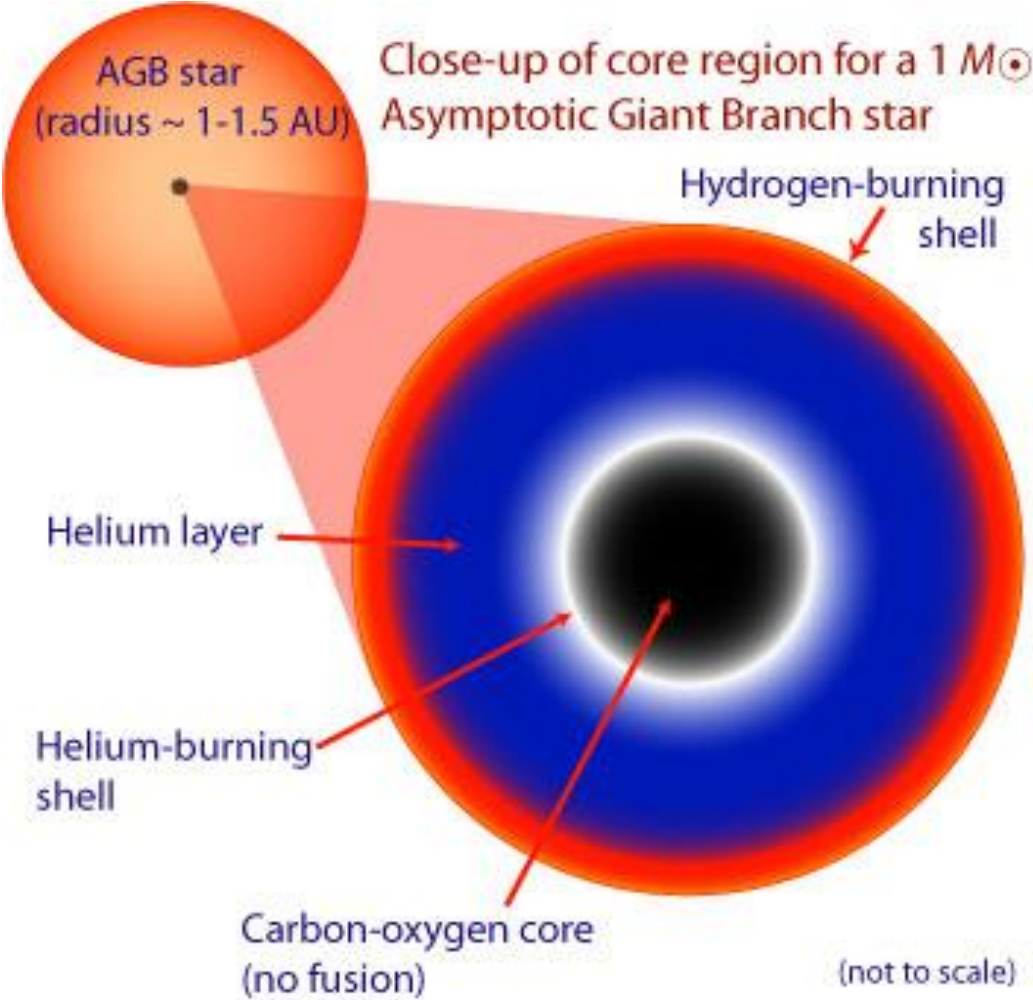
Jasność czerwonego olbrzyma o zdegenerowanym jądrze rośnie z masą jądra i jest to niezależne od masy otoczki

● Słońce jako gwiazda ciągu głównego, $R=1R_{\odot}$

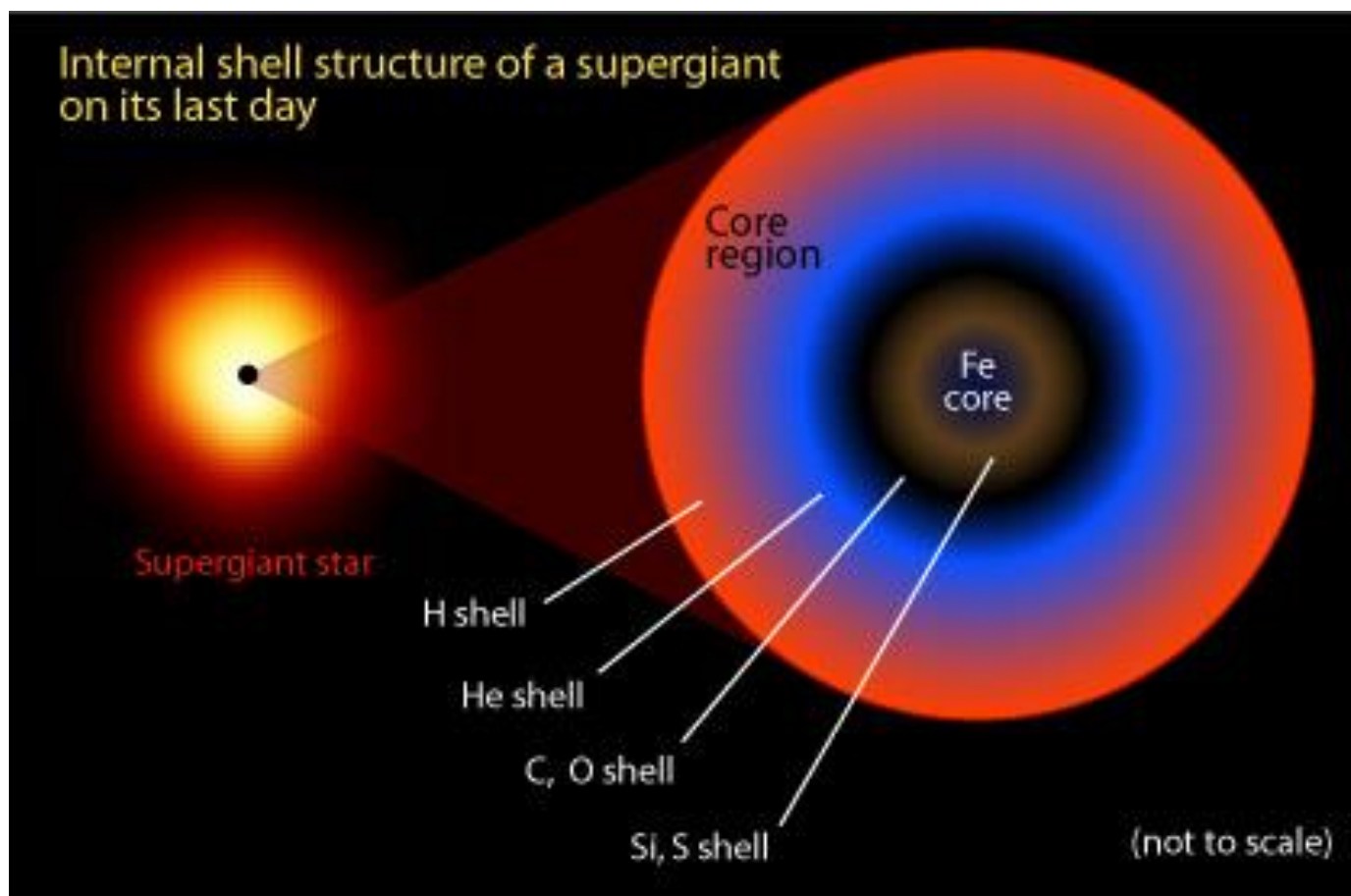


Słońce jako czerwony olbrzym, $R=100R_{\odot}$

Gwiazda AGB



Wyewoluowana gwiazda masywna

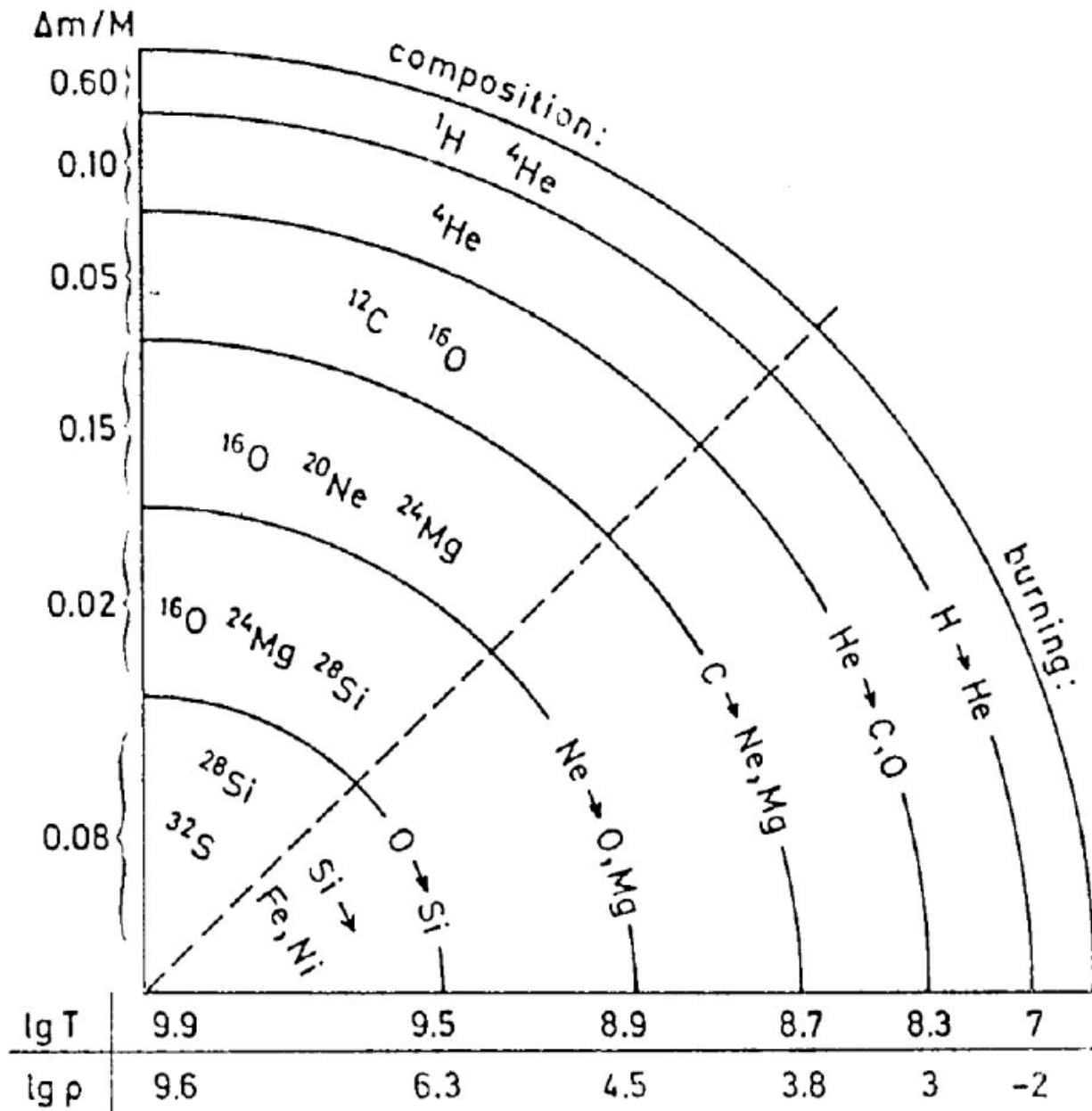


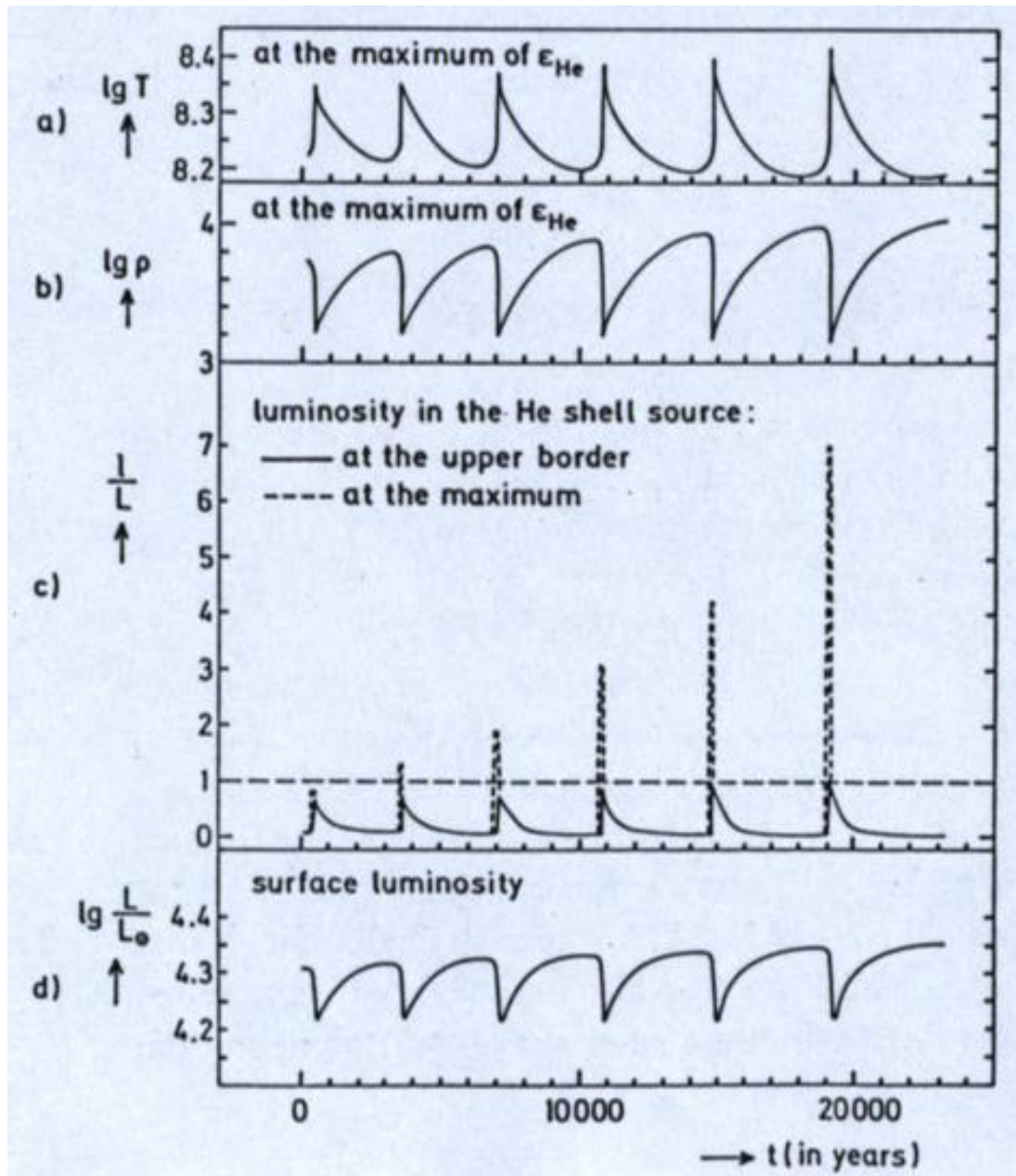
W centralnych obszarach gwiazd dostatecznie masywnych mamy dość prosty schemat



**Ciąg te może być przerwany czasowo
lub zupełnie przez:**

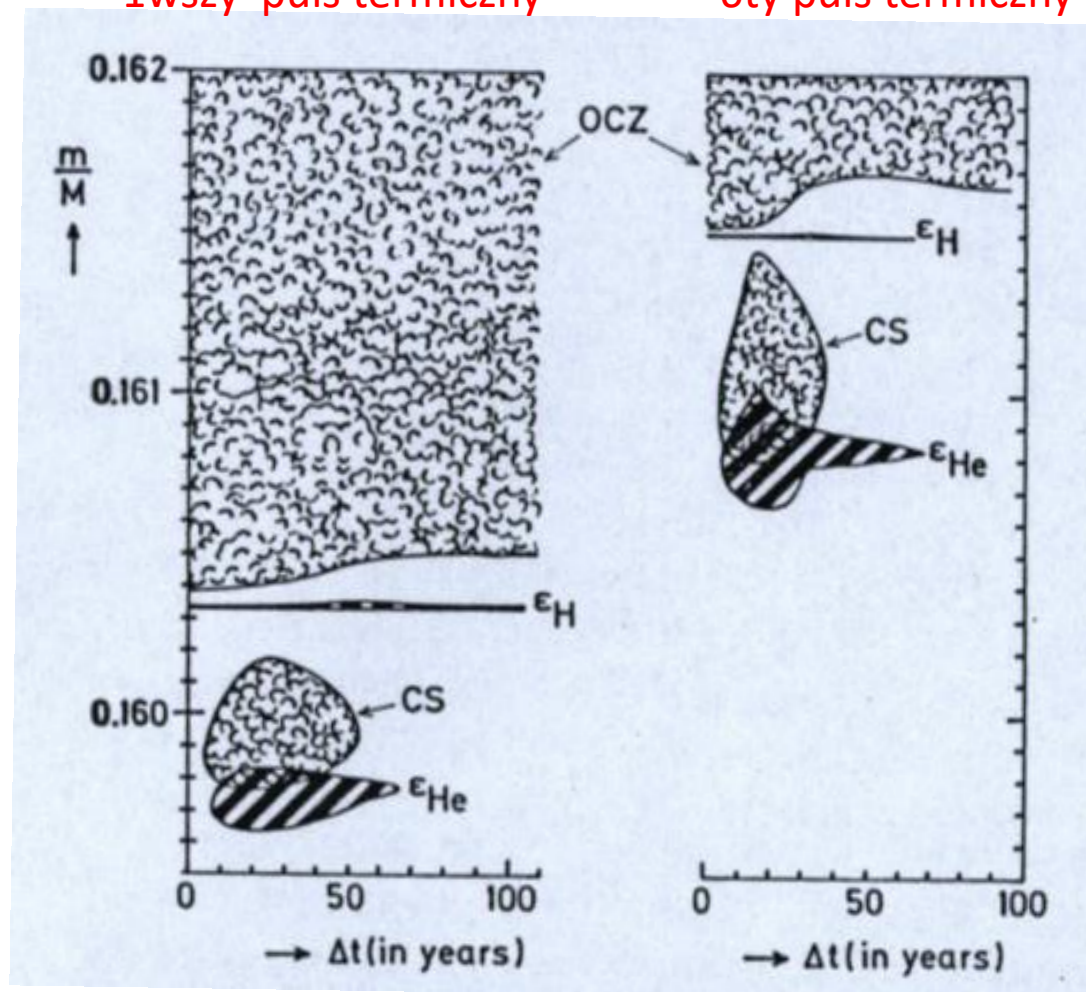
- **dojście do Fe**
- **degenerację**
- **silną emisję neutrin (T_c maleje)**

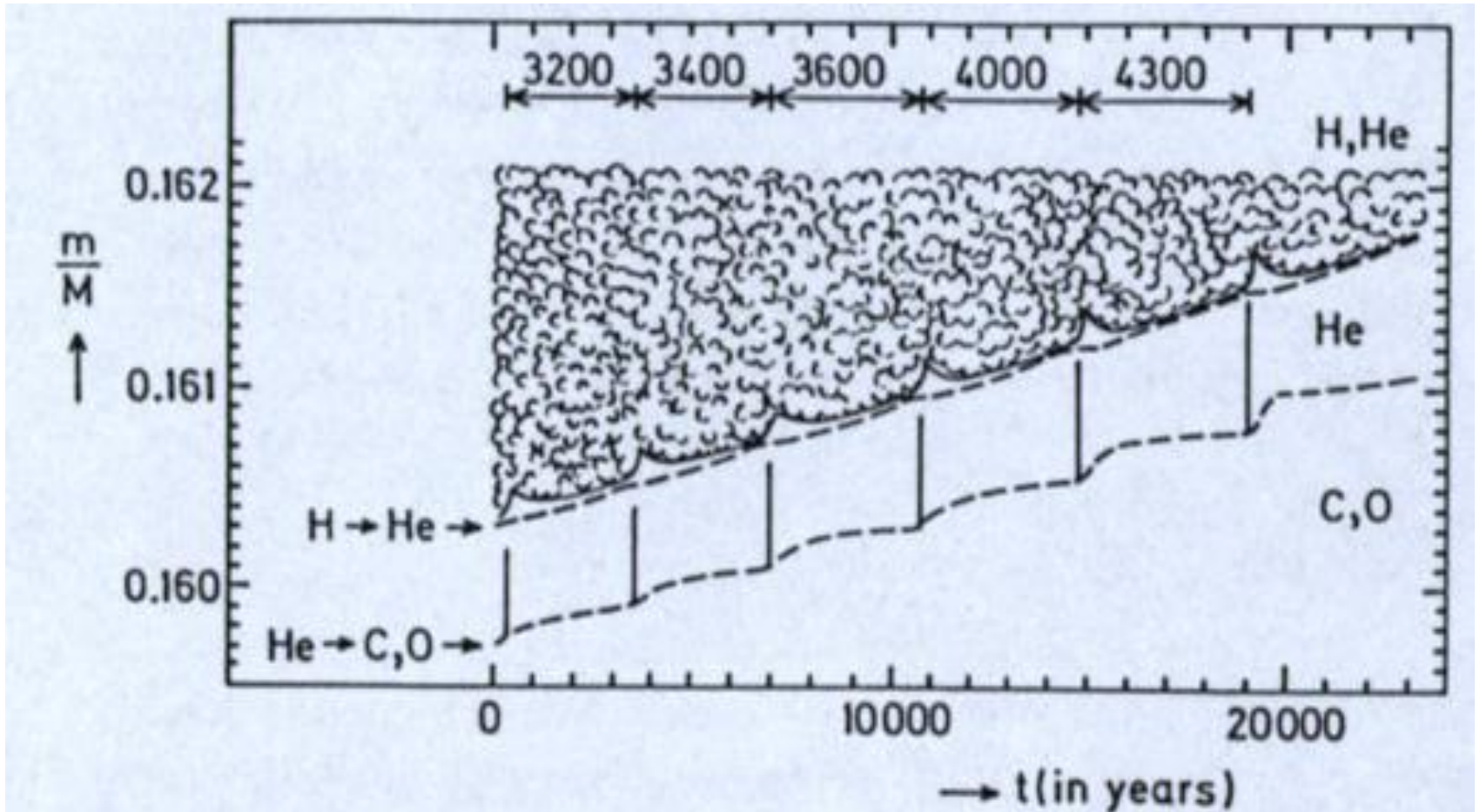




1wszy puls termiczny

6ty puls termiczny



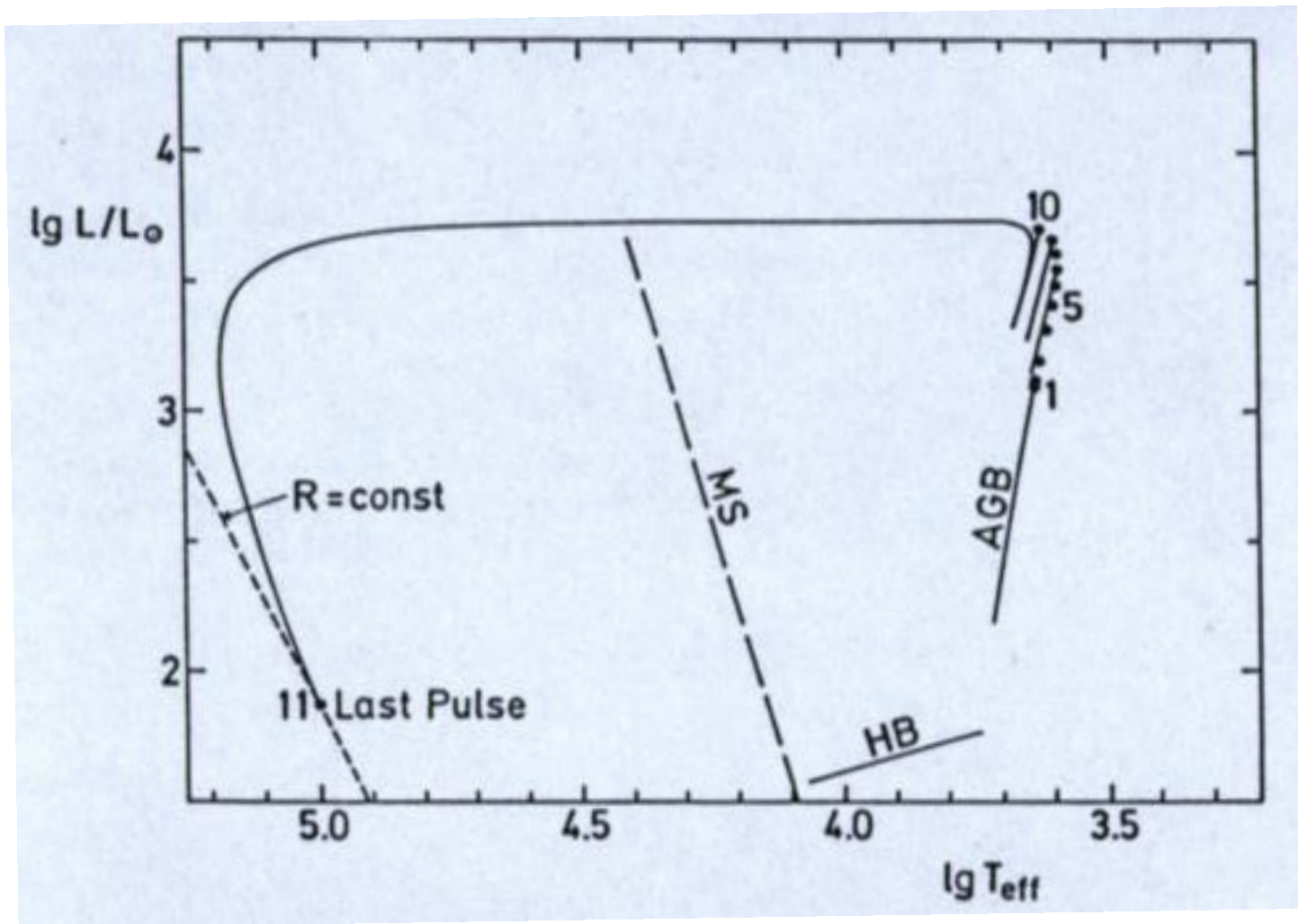


$$\log \left(\frac{\tau_p}{1 \text{ rok}} \right) \approx 3.05 + 4.50 \left(1 - \frac{M_c}{M_\odot} \right)$$

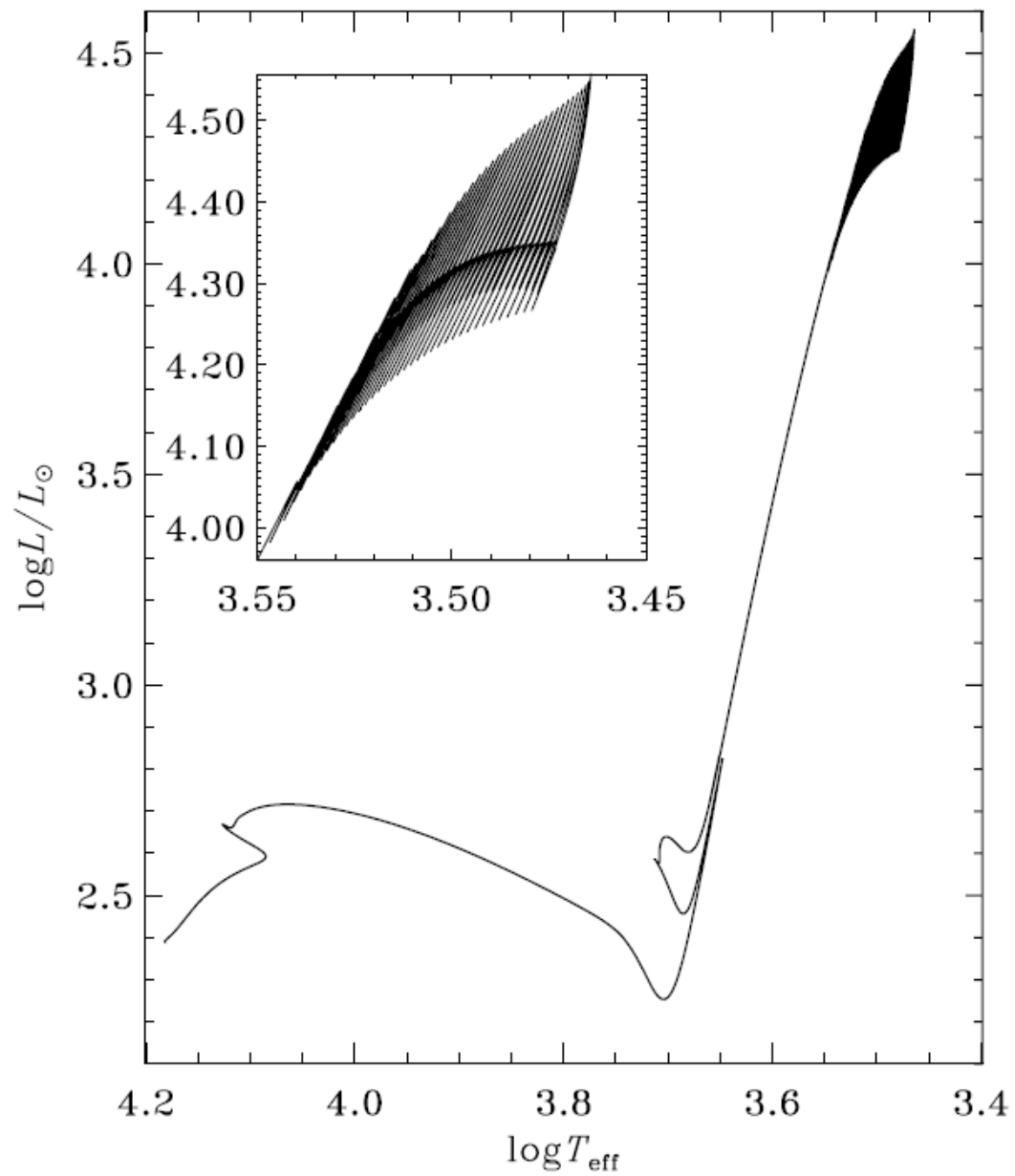
$$M_c \nearrow \rightarrow \tau_p \searrow$$

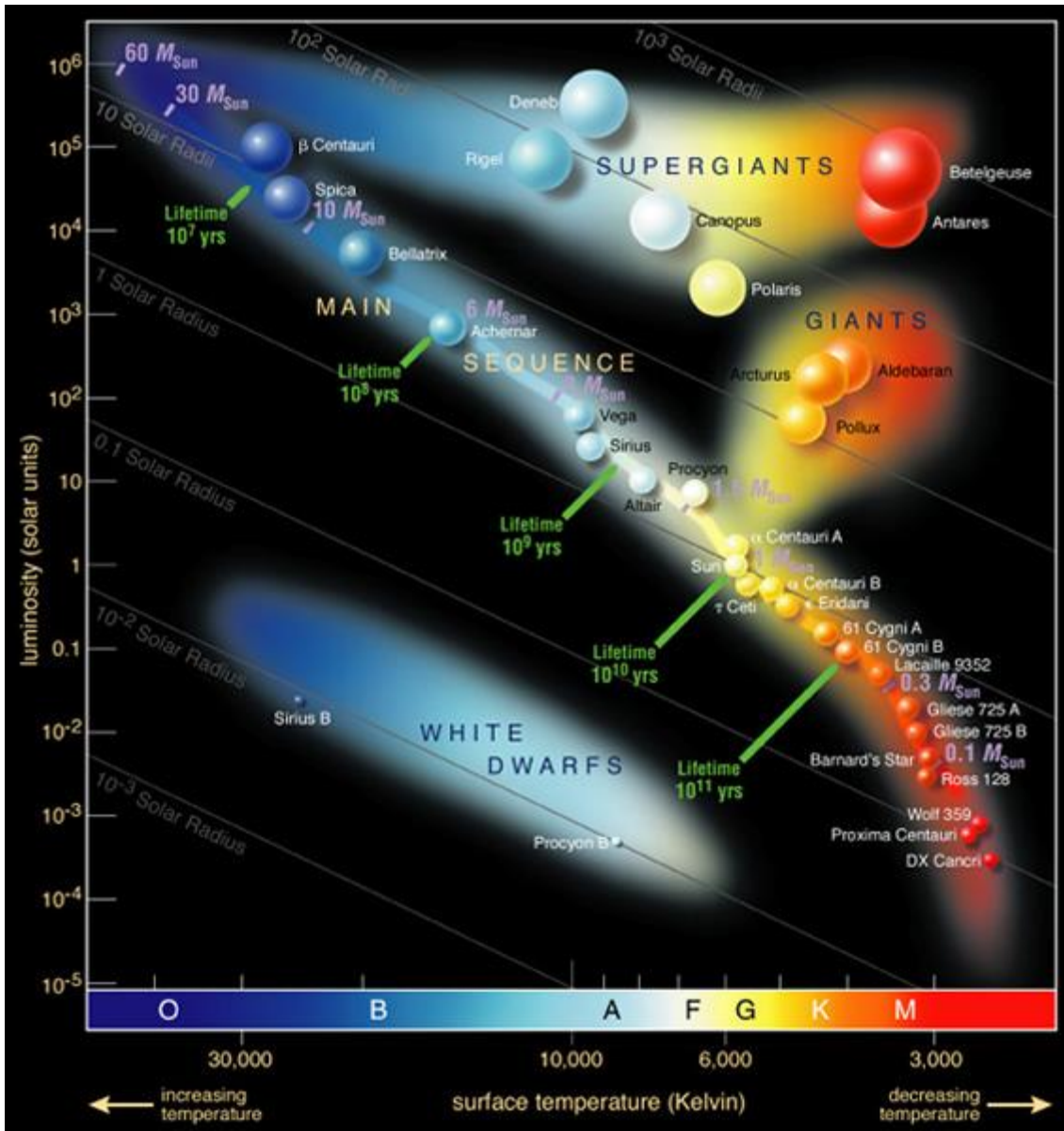
$$M_c = 0.5 M_\odot \rightarrow \tau_p = 10^5 \text{ lat}$$

$$M_c = 1.4 M_\odot \rightarrow \tau_p = 10 \text{ lat}$$

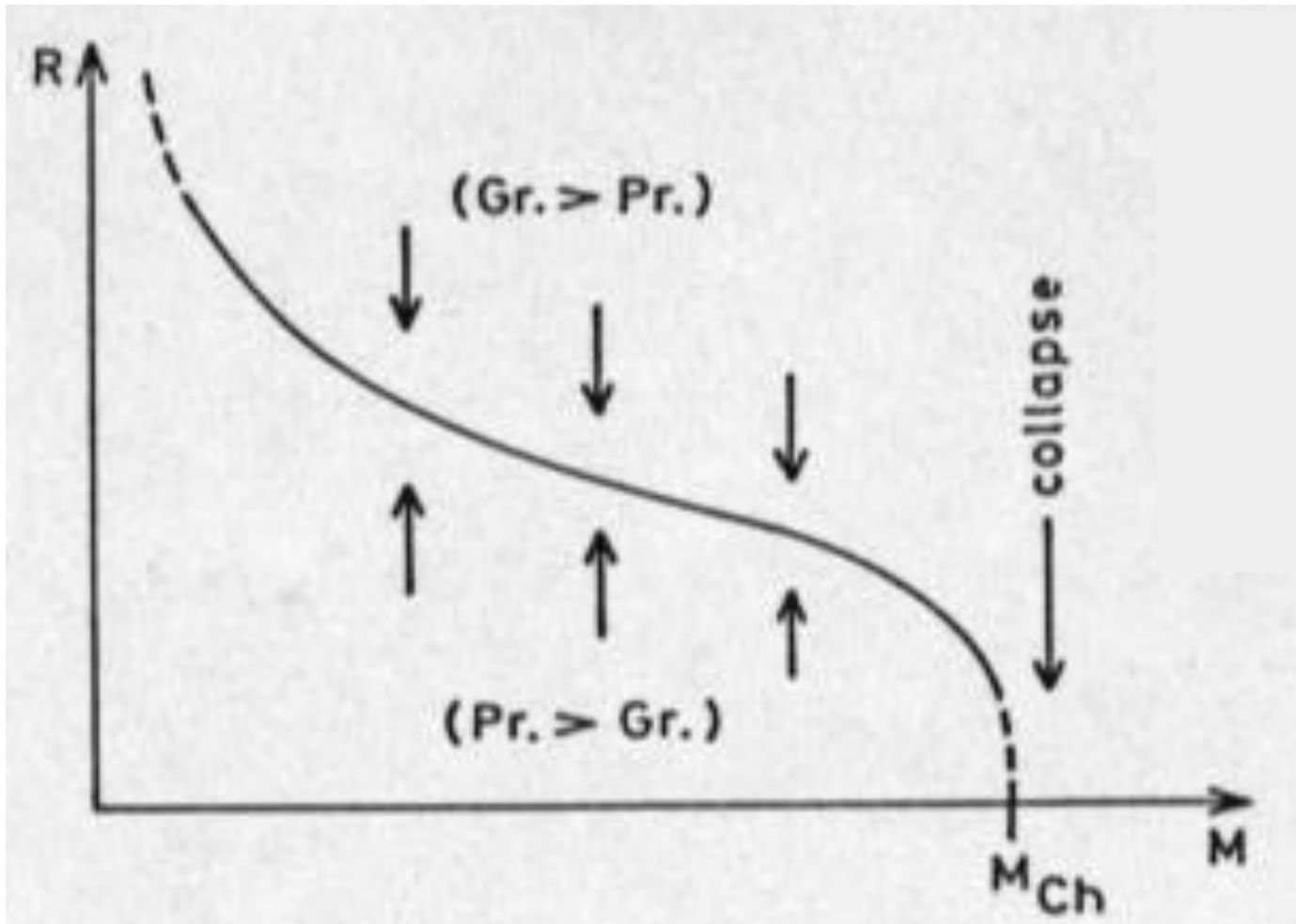


$4M_{\odot}$





Białe Karty

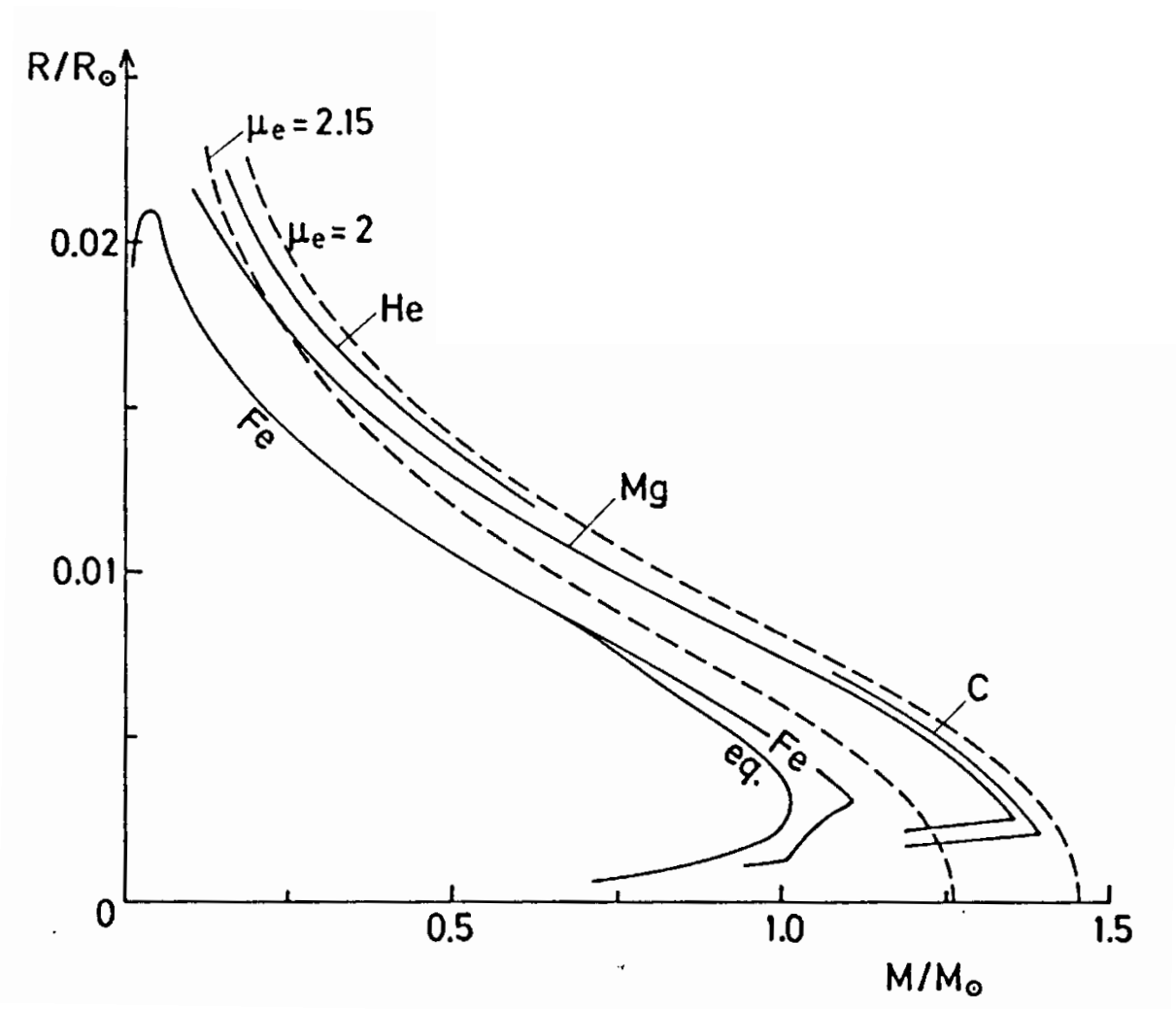


$1/z_c^2$	x_c	ζ_1	$(-\zeta^2 d\varphi/d\zeta)_1$	ρ_c/μ_e (g cm ⁻³)	$\mu_e^2 M$ (M_\odot)	$\mu_e R$ (km)
0	∞	6.8968	2.0182	∞	5.84	0
0.01	9.95	5.3571	1.9321	9.48×10^8	5.60	4.170
0.02	7	4.9857	1.8652	3.31×10^8	5.41	5.500
0.05	4.36	4.4601	1.7096	7.98×10^7	4.95	7.760
0.1	3	4.0690	1.5186	2.59×10^7	4.40	10.000
0.2	2	3.7271	1.2430	7.70×10^6	3.60	13.000
0.3	1.53	3.5803	1.0337	3.43×10^6	2.99	16.000
0.5	1	3.5330	0.7070	9.63×10^5	2.04	19.500
0.8	0.5	4.0446	0.3091	1.21×10^5	0.89	28.200
1.0	0	∞	0	0	0	∞

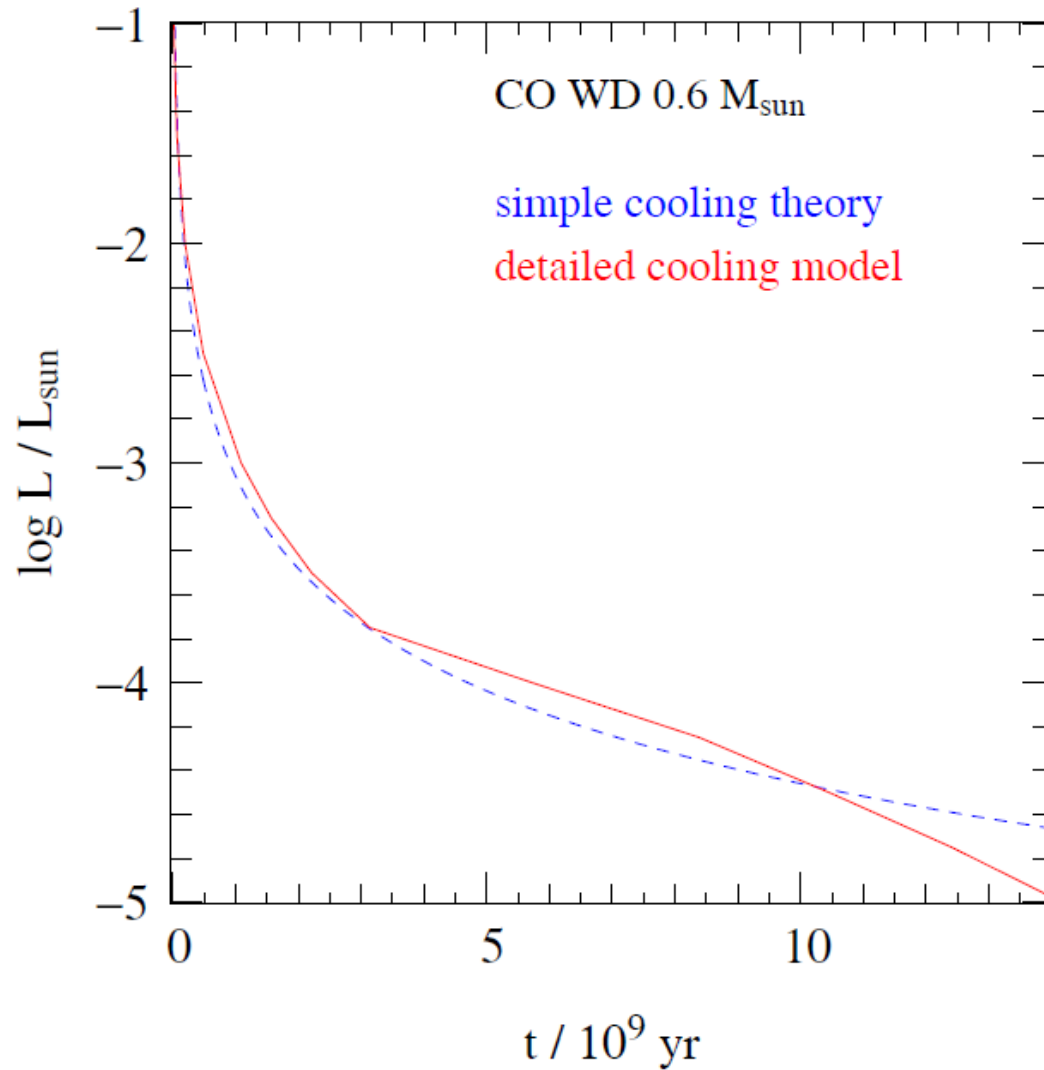
Porównanie numerycznych i analitycznych wartości promieni białych karłów dla $\mu_e = 2$

log ρ_c	M / M $_{\odot}$	R / R $_{\odot}$		błąd
		numeryczny	analityczny	
4	.04811	.3448	.3446	.0008
5	.14600	.2339	.2335	.0015
6	.39366	.01566	.01558	.0048
7	.80146	.01013	.00997	.0158
8	1.16176	.00619	.00593	.0411
9	1.34619	.00353	.00325	.0803
10	1.41096	.00188	.00165	.1230

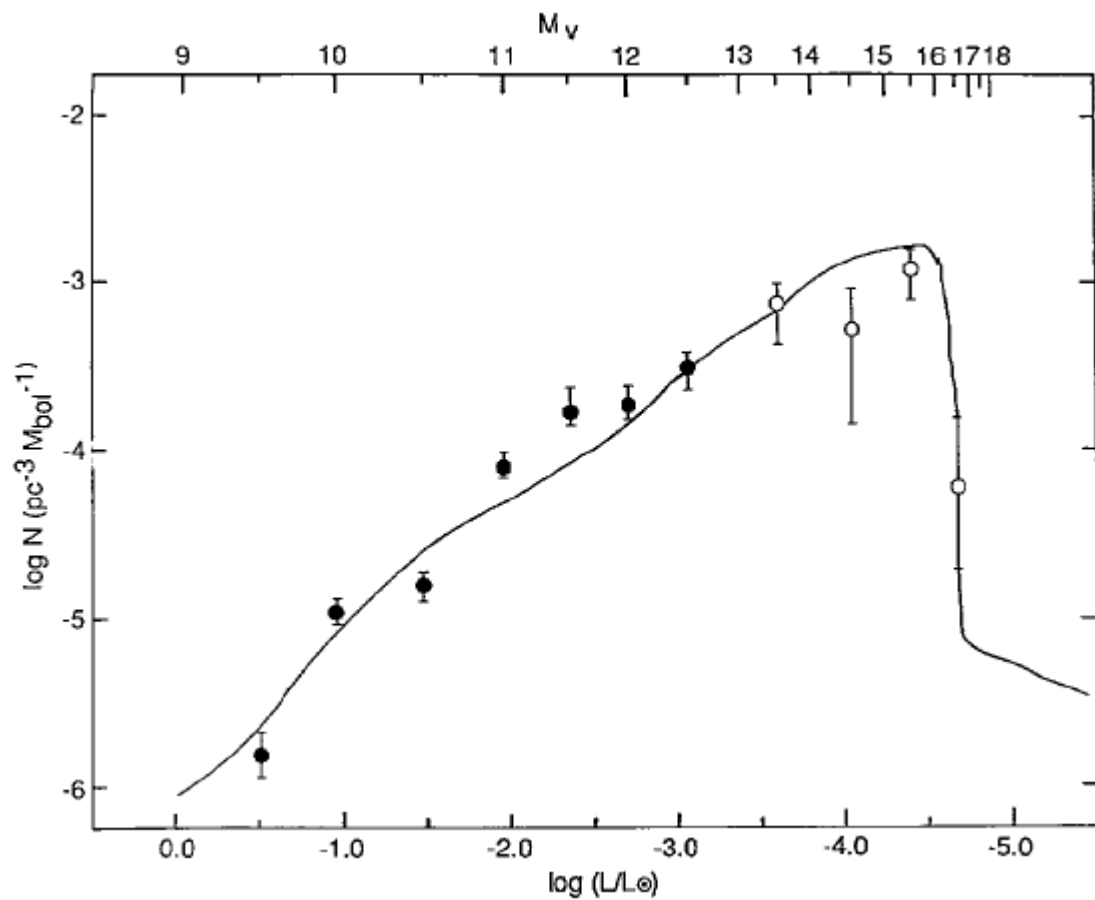
Zależności M-R dla białych karłów



Teoretyczne krzywe chłodzenia dla
białego karła C-O o masie 0.6 M

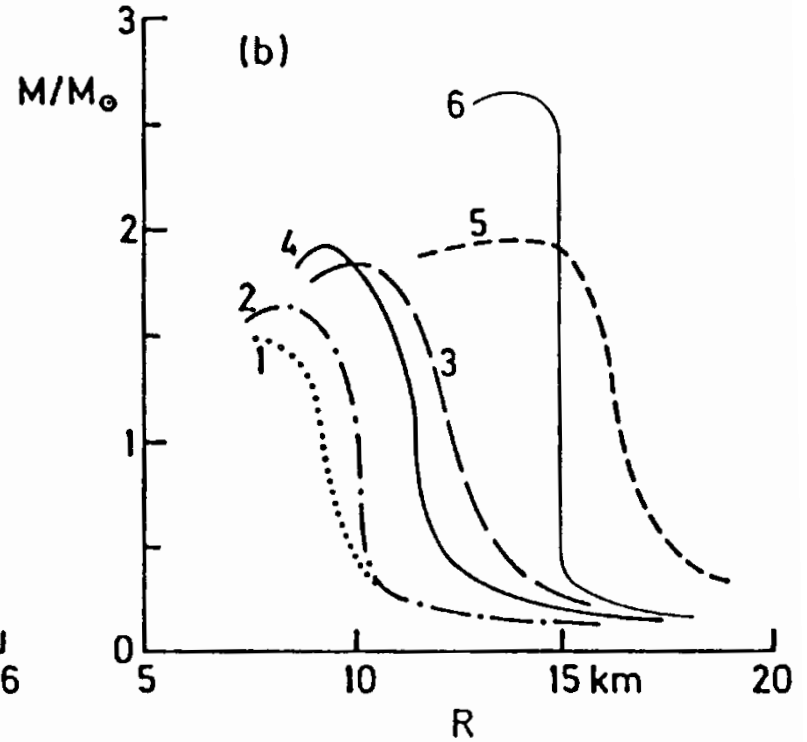
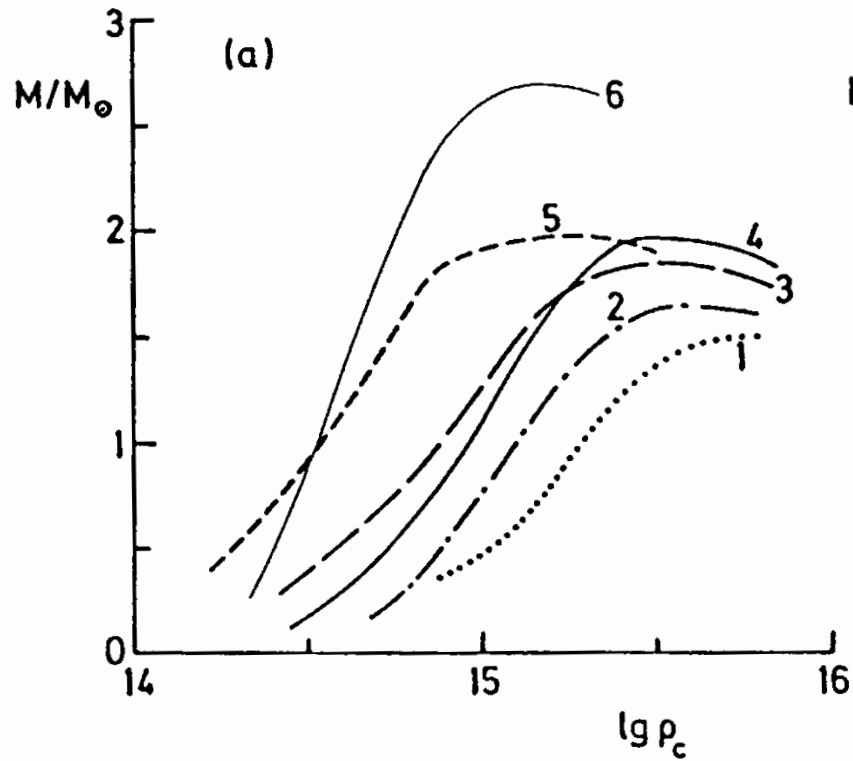


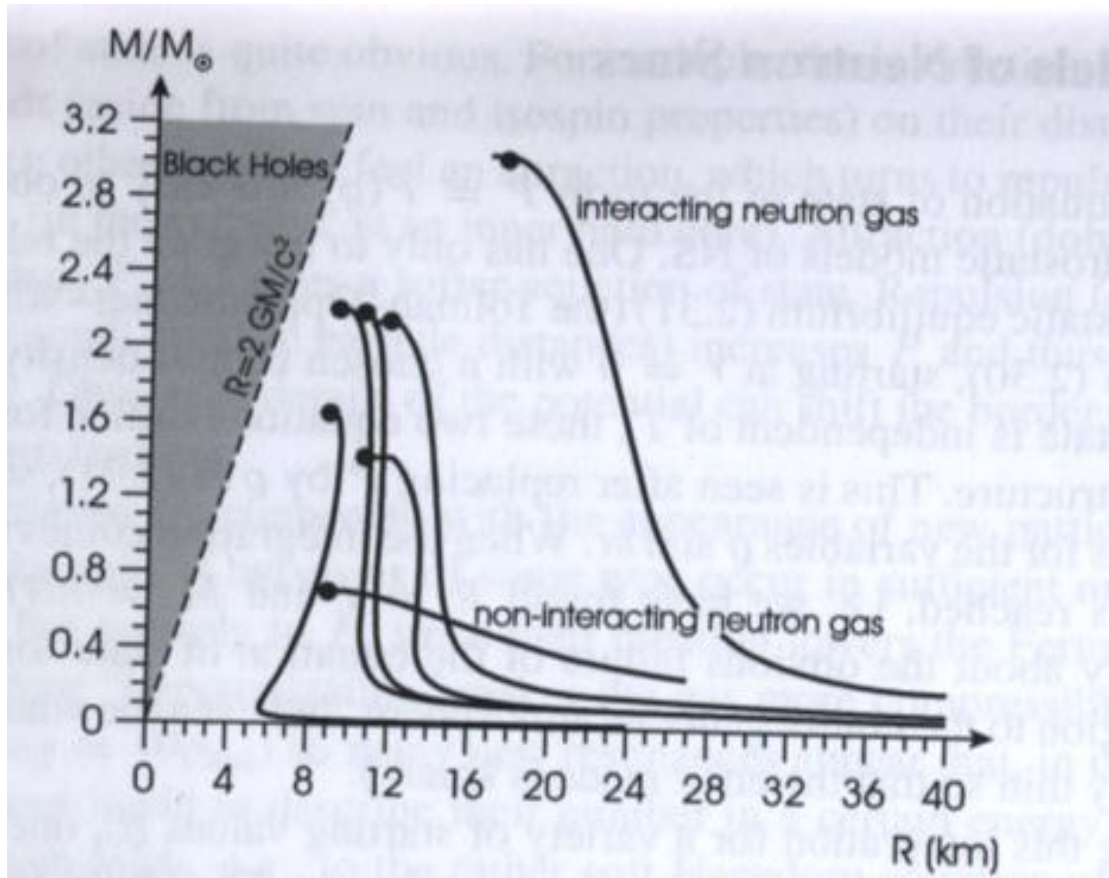
Rozkład jasności białych karłów w dysku galaktycznym

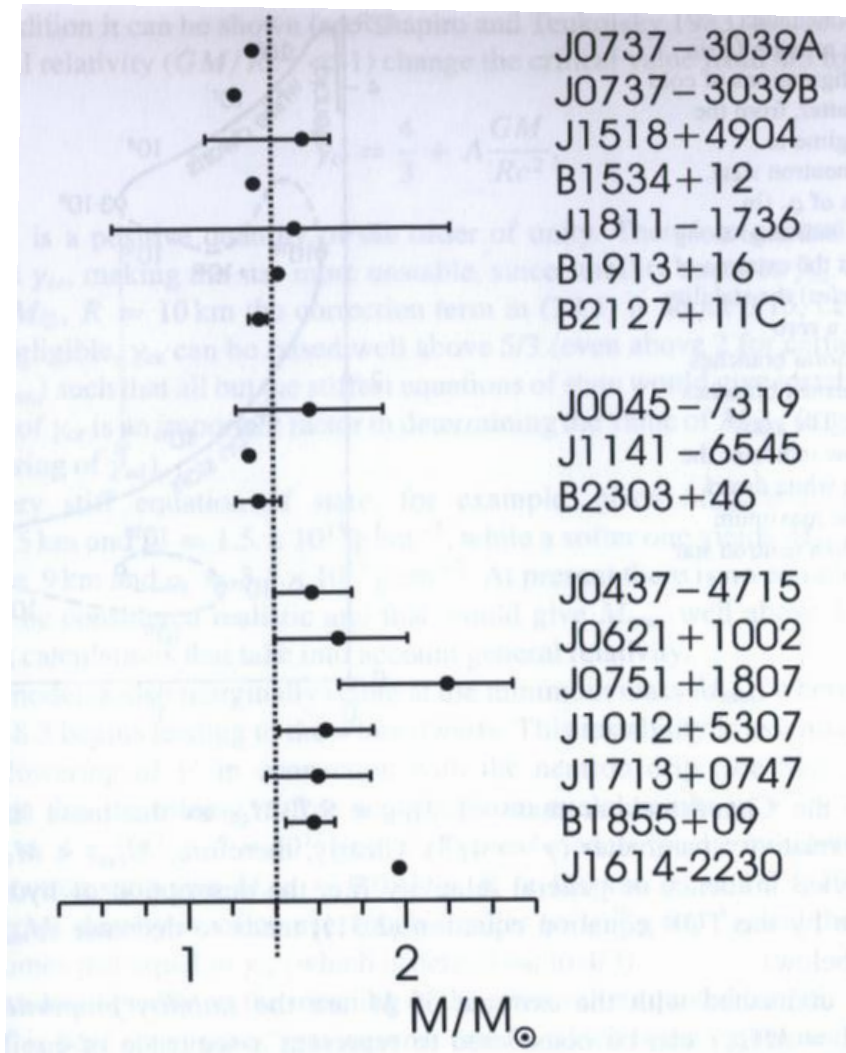


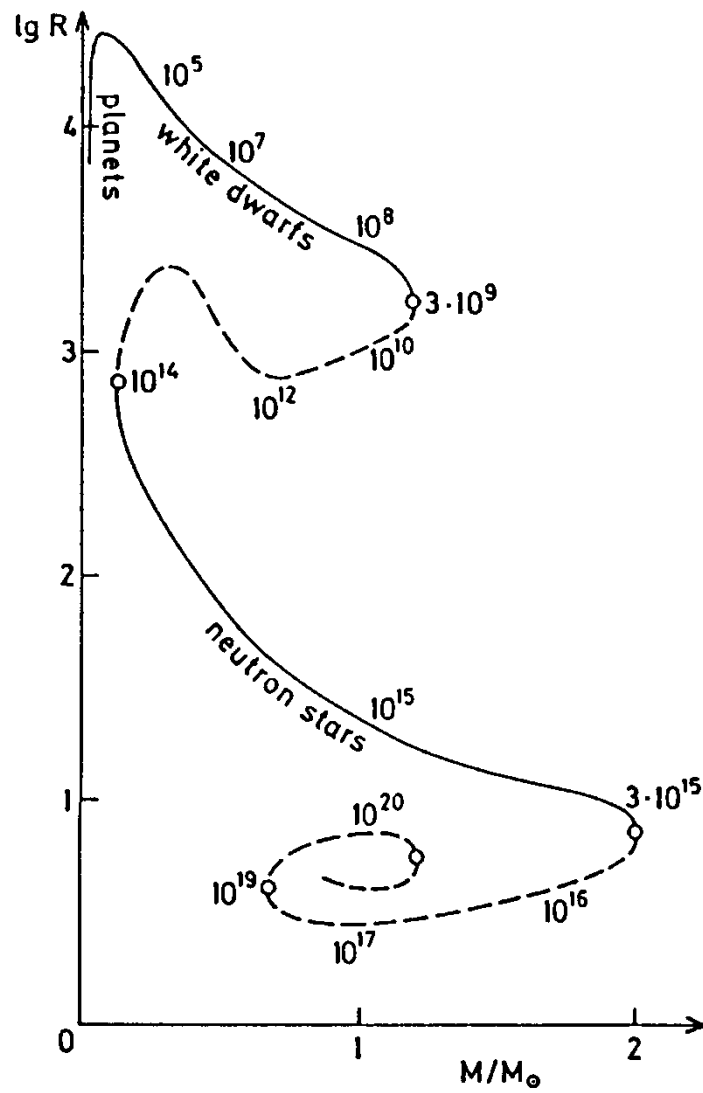
Gwiazdy neutronowe

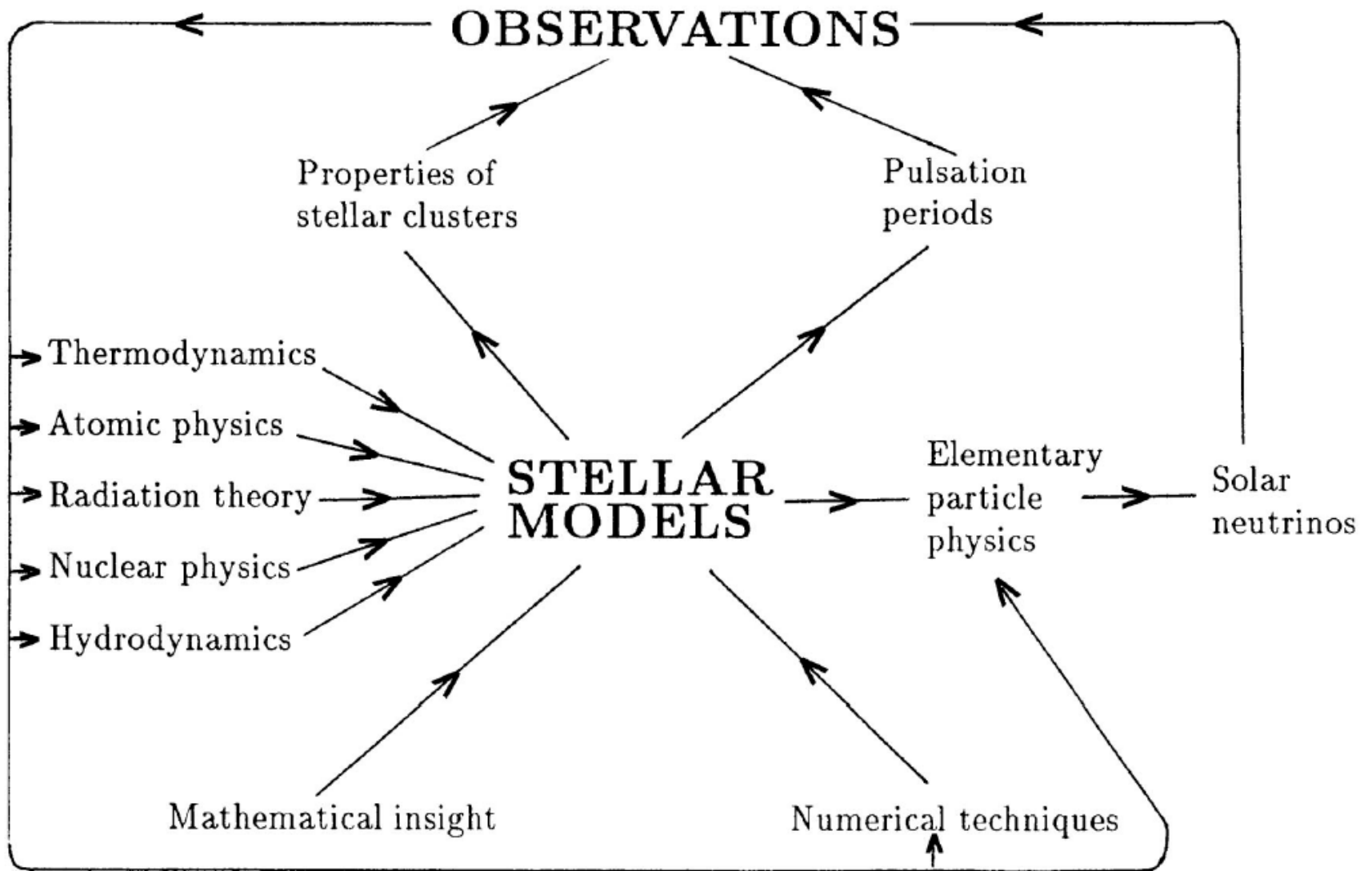
Zależności $M - \log \rho_c$ i $M - R$ dla gwiazd neutronowych
wyliczone dla 6 różnych równań stanu

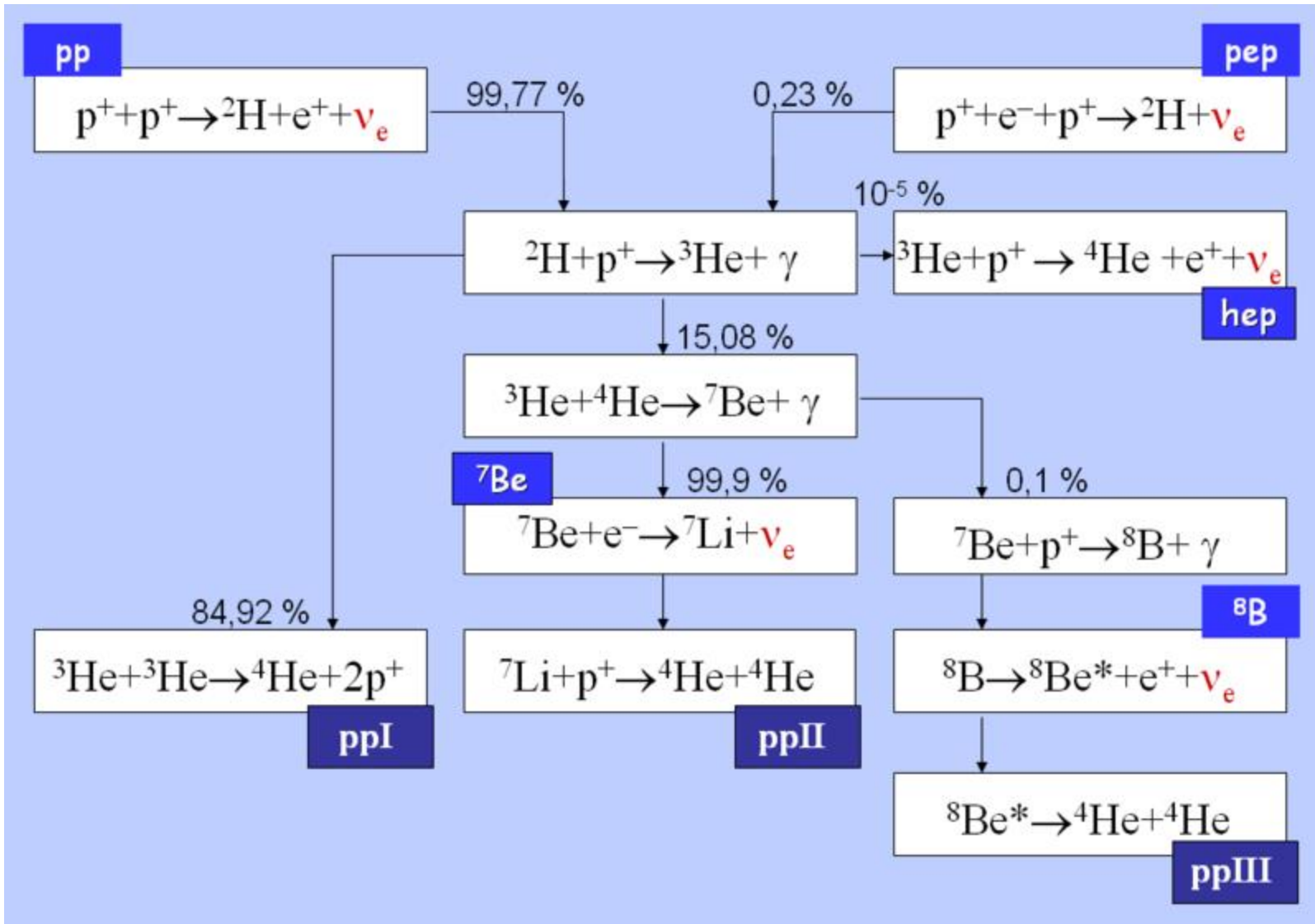


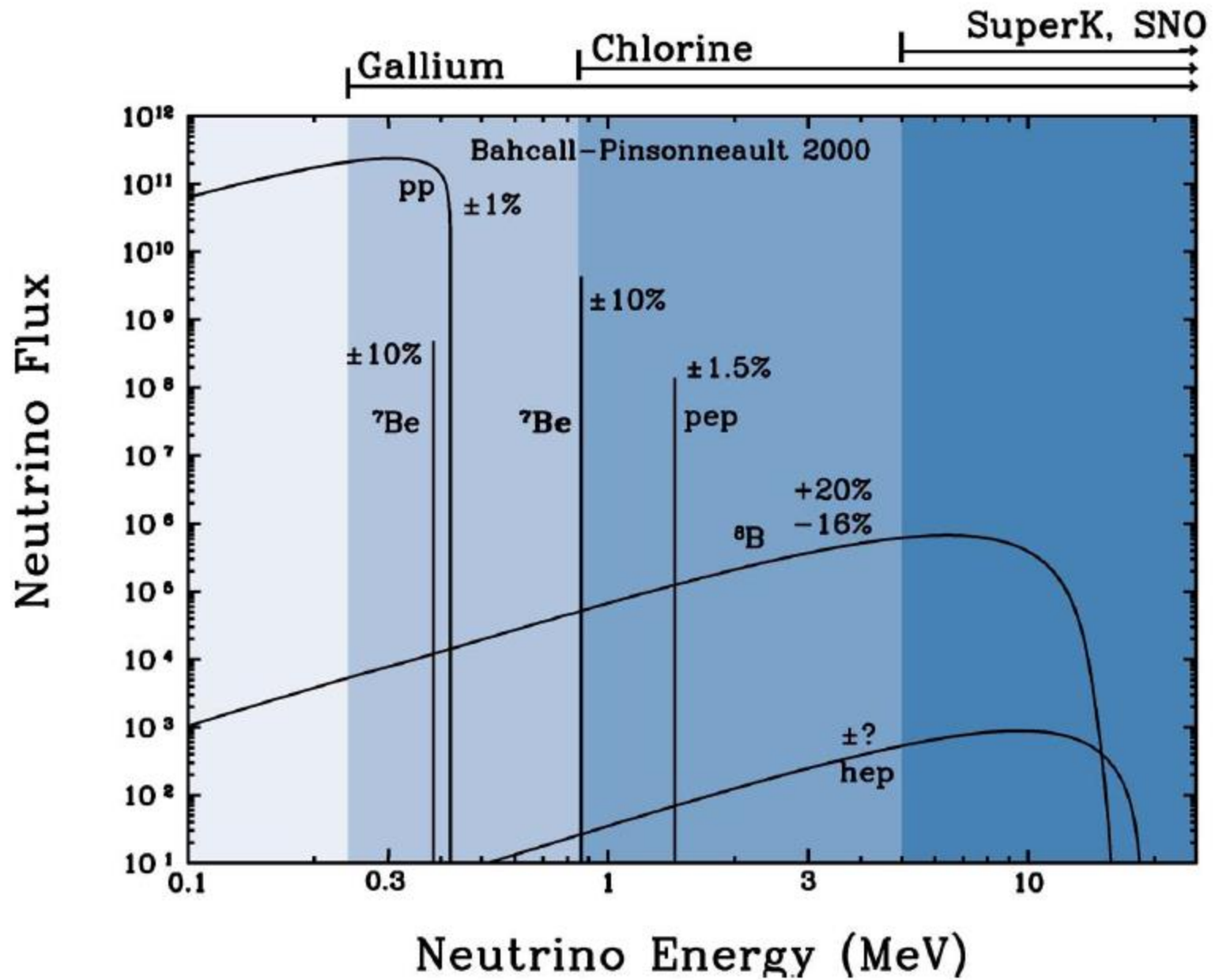




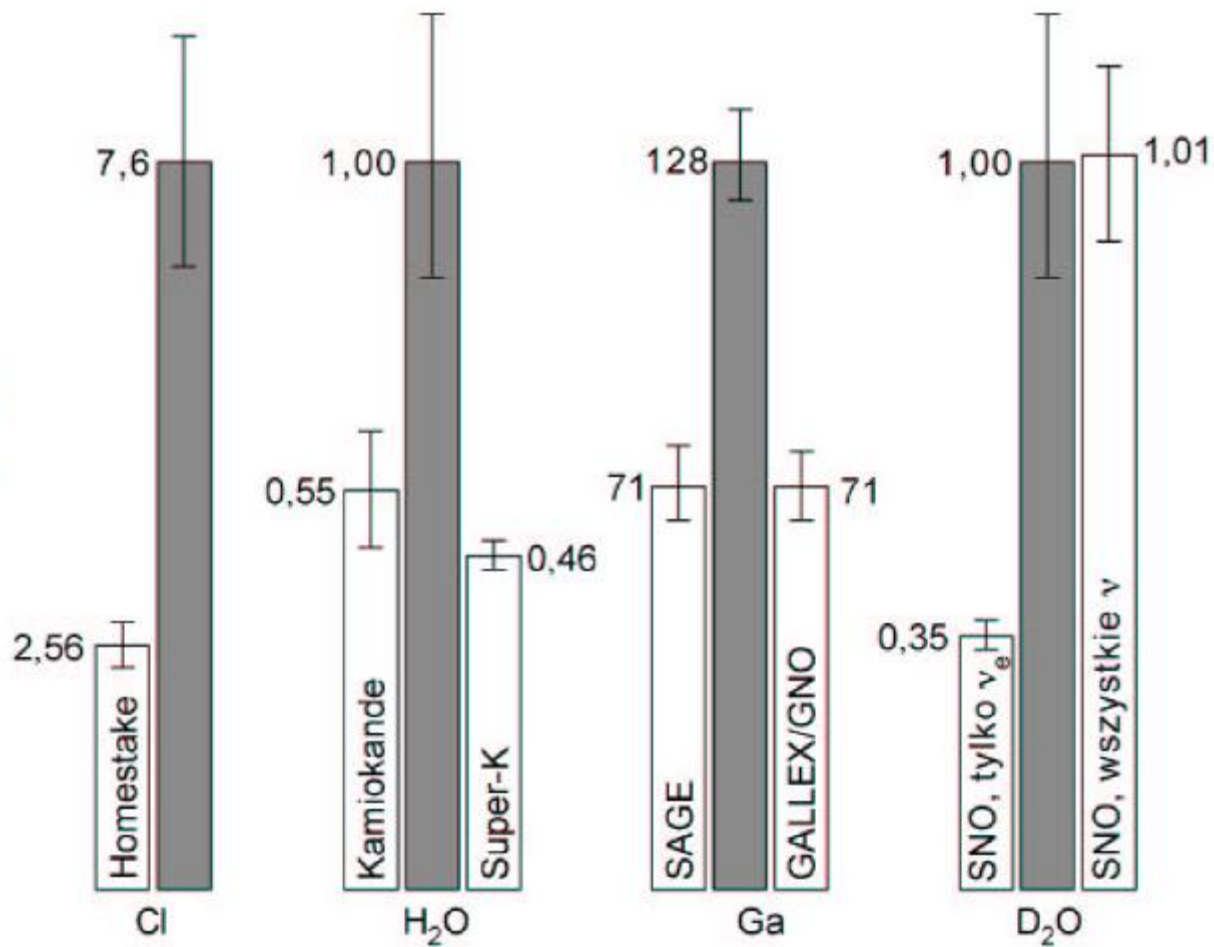








SNU



Christensen-Dalsgaard,
Stellar Structure and Evolution, Rozdział 11.5

Tadeusz Jarzębowski, Astronomia neutrinowa
Urania - Postępy Astronomii nr 2/2003

John N. Bahcall, How the Sun shines
<http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0009259v3.pdf>

STANDARDOWY MODEL SŁOŃCA

model o masie $1 M_{\odot}$ wyewoluowany do wieku Słońca o słonecznych wartościach L , R , Z/X

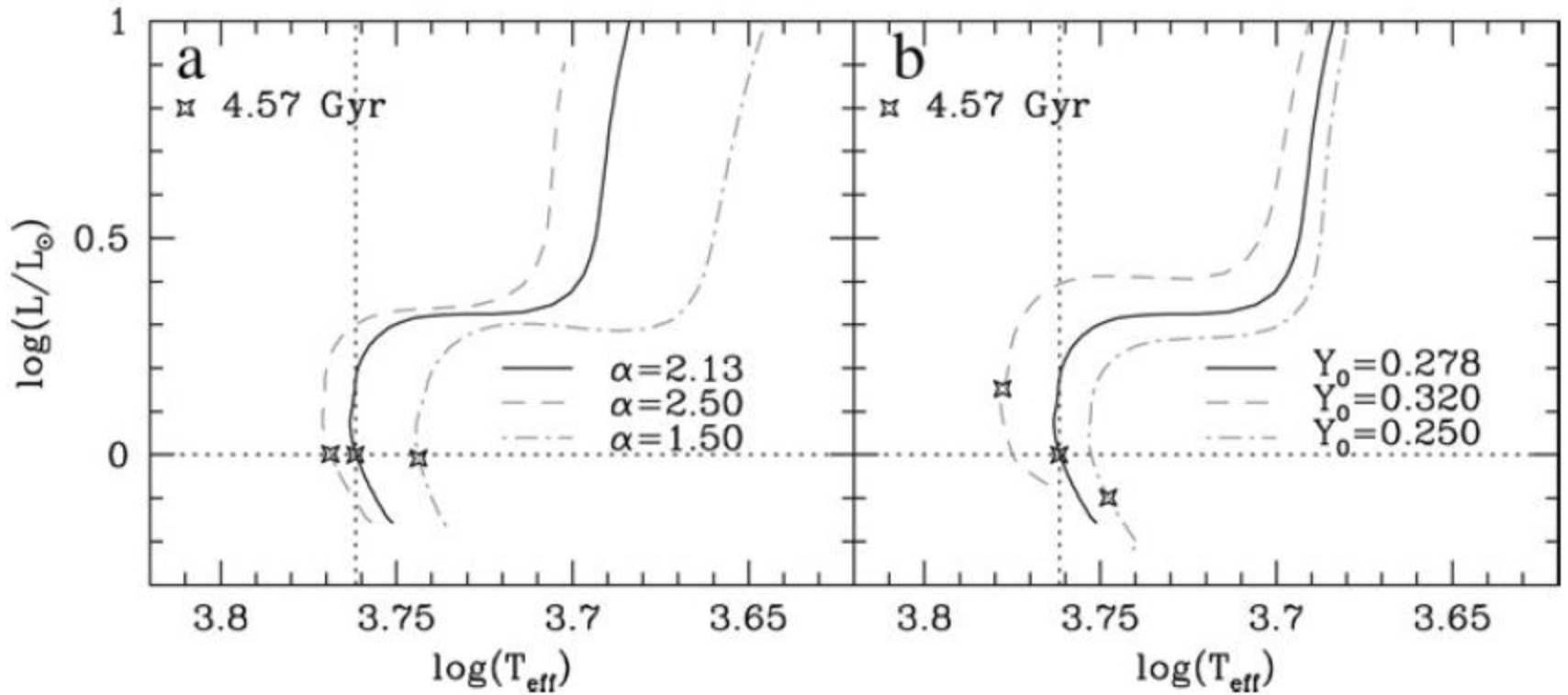
Table 1
Global parameters of the Sun

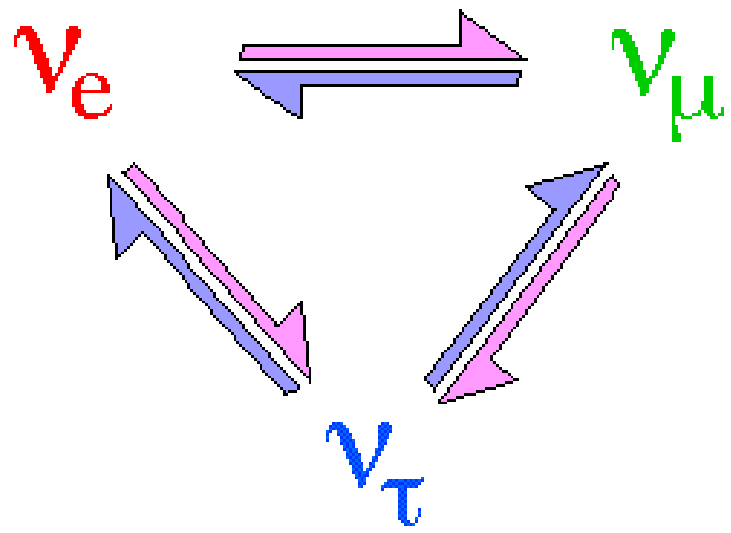
Quantity	Estimate	Reference
Mass (M_{\odot}) ^a	$1.98892(1 \pm 0.00013) \times 10^{33}$ g	Cohen and Taylor (1987)
Radius (R_{\odot}) ^b	$6.9599(1 \pm 0.0001) \times 10^{10}$ cm	Allen (1973)
Luminosity (L_{\odot})	$3.8418(1 \pm 0.004) \times 10^{33}$ ergs s ⁻¹	Fröhlich and Lean (1998), Bahcall et al. (1995)
Age	$4.57(1 \pm 0.0044) \times 10^9$ yr	Bahcall et al. (1995)

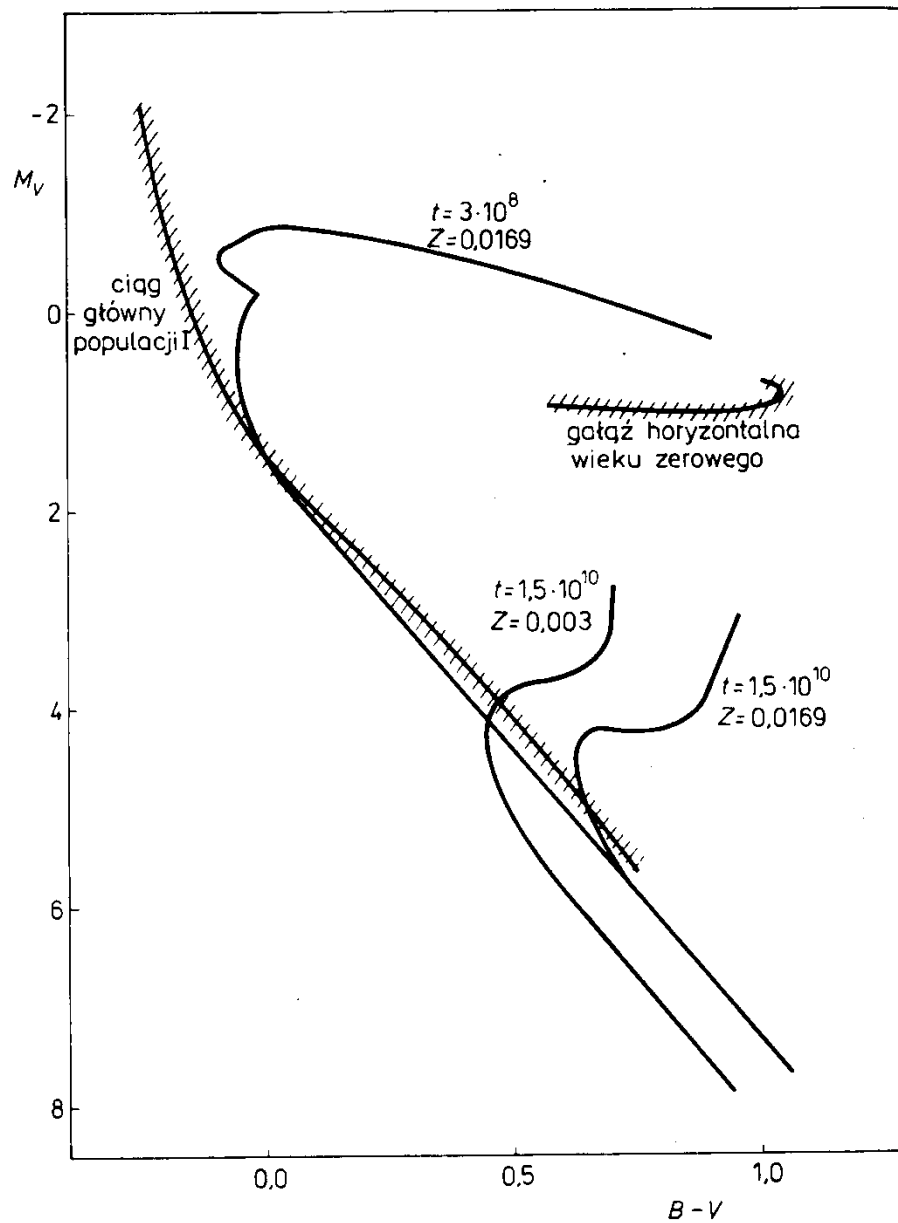
^a Derived from the values of G and GM_{\odot} .

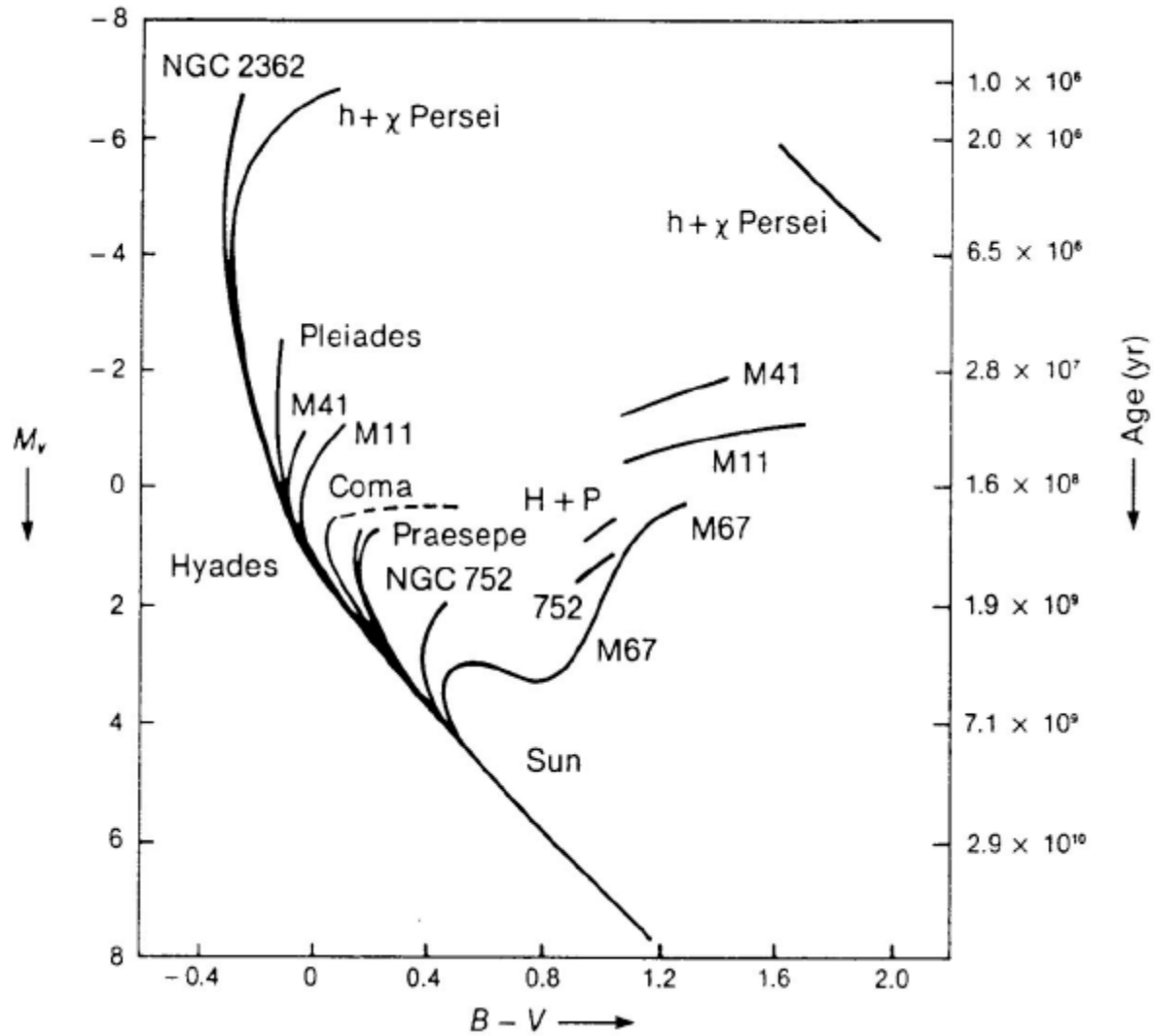
^b See Schou et al. (1997), Antia (1998) and Brown and Christensen-Dalsgaard (1998) for a more recent discussion about the exact value of the solar radius.

wolne parametry: Y , α_{MLT}



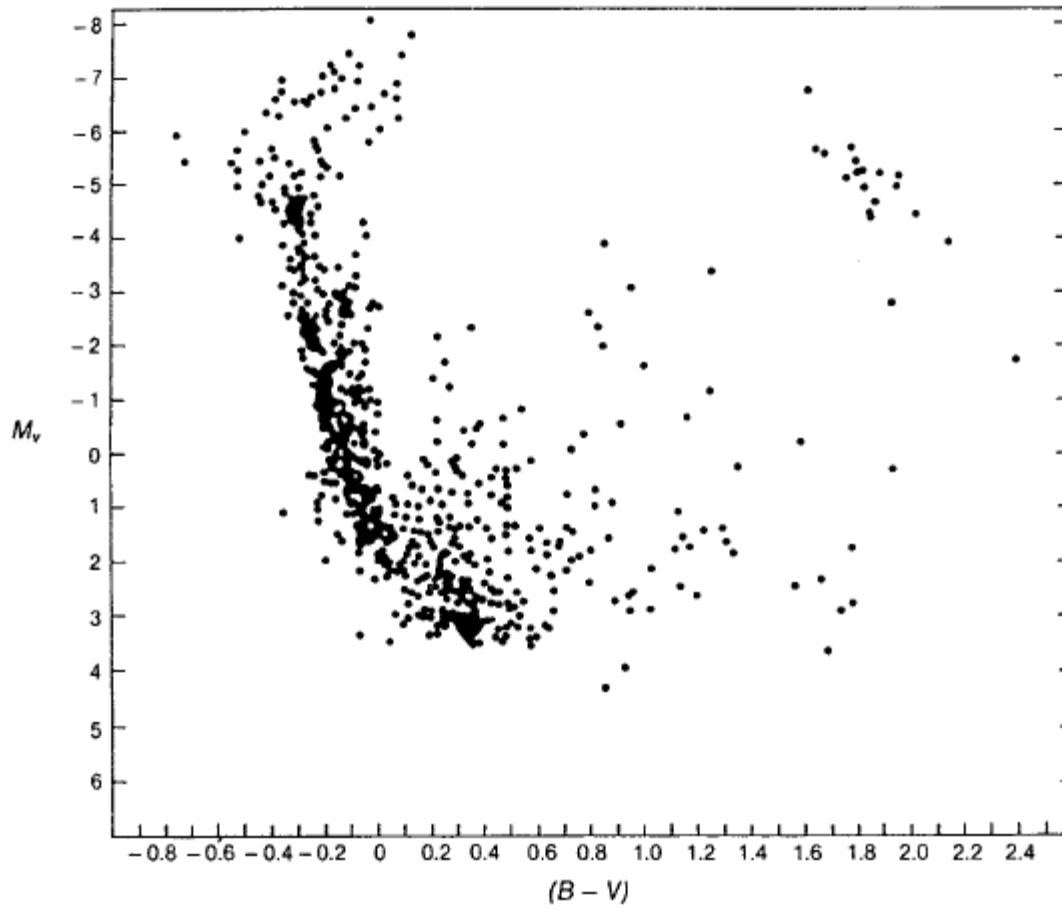




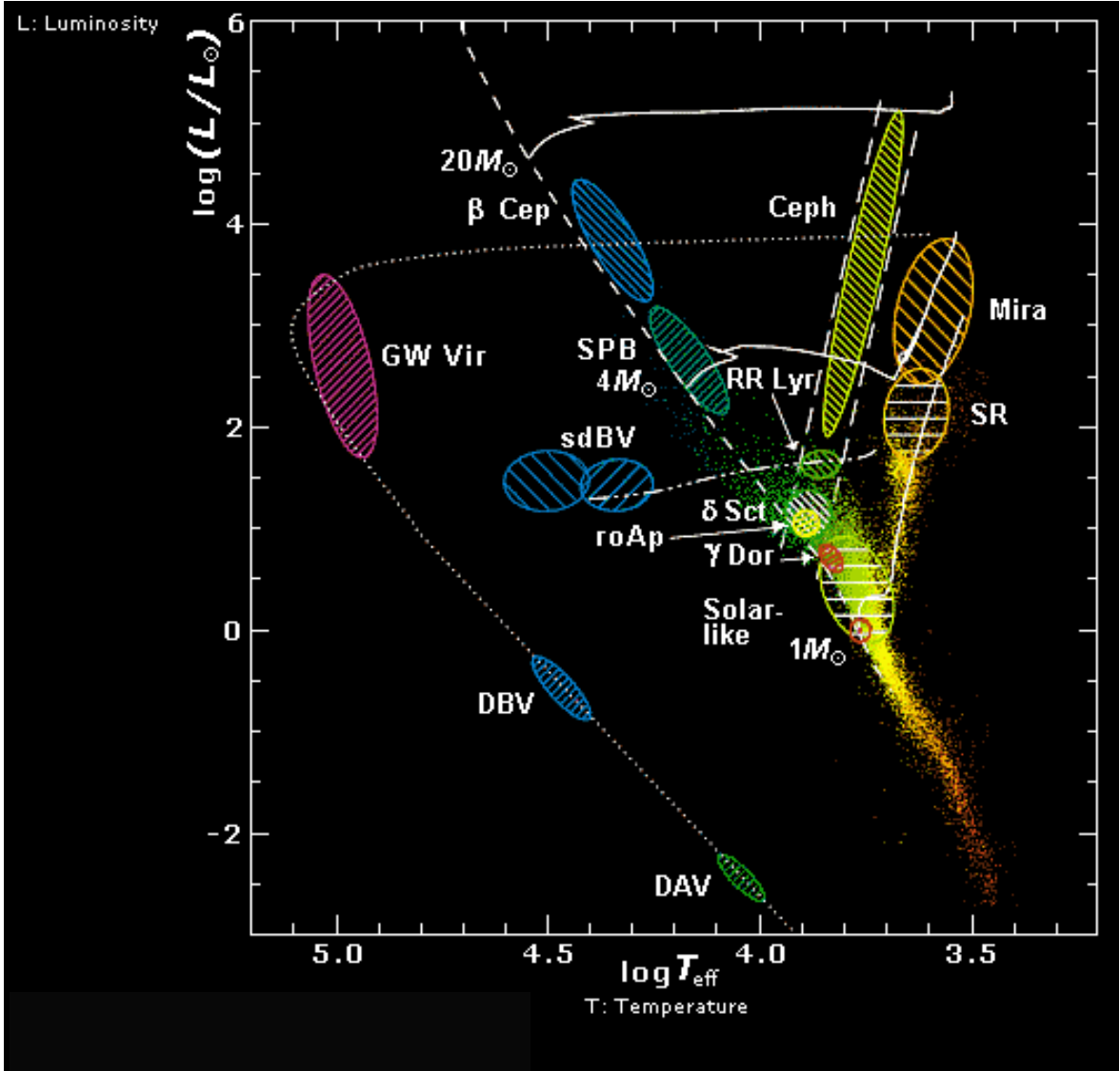


Sandage 1957

$h+\chi$ Persei



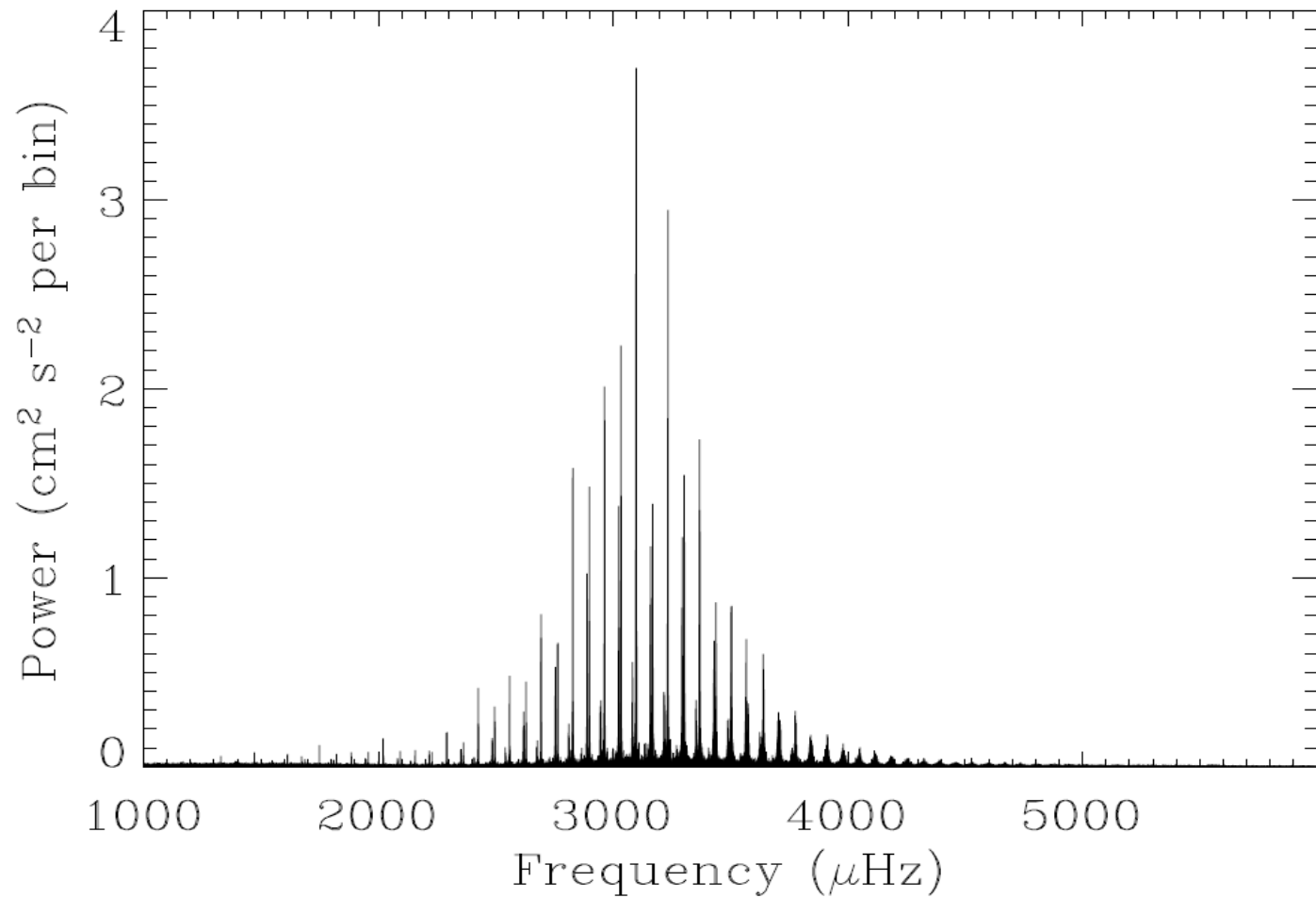
Obszary niestabilności pulsacyjnej na diagramie Hertzsprunga-Russella



TYPY GWIAZD PULSUJĄCYCH

TYP	M/M _☉	logT _{eff}	P	mody pulsacji
Cepheids	4-14	3.7-3.9	1-80 d	rad, nierad?
RR Lyr	0.5-0.7	3.8-3.9	0.1-1.2 d	rad, nierad?
Miry	2-3?	3.3-3.5	80-1500 d	radialne
δ Sct, SX Phe	1.5-2.8	3.8-3.9	0.01-0.3 d	p, g, niskie n
γ Dor	~1.5	3.8-3.85	0.3-1.5 d	g, n>>1
roAp	1.8-2	~3.9	6-15 min	p, n>>1
SPB	3-7	4.1-4.3	0.5-4 d	g, n>>1
β Cep	8-16	4.35-4.5	0.07-0.3 d	p, g
solar type	~1	3.7-3.8	5-16 min	p, n>>1
ZZ Cet (DAV)	0.4-0.8	4.05-4.1	1-15 min	g
V777 Her (DBV)	~0.6	4.33-4.4	1-15 min	g, n>>1
GW Vir(DOV+PNNV)	0.6	4.8-5.2	5-33 min	g, n>>1
V361 Hya (sdB)	<0.5	4.45-4.6	80-600 s	p, low n
V1093 Her (sdB)	<0.5	4.4-4.48	45min- 2h	g, n>>1
sdOv	0.5	4.6 – 5.0	60-160 s	g, n>>1
Hybrid pulsators, np. typ β Cep/SPB				

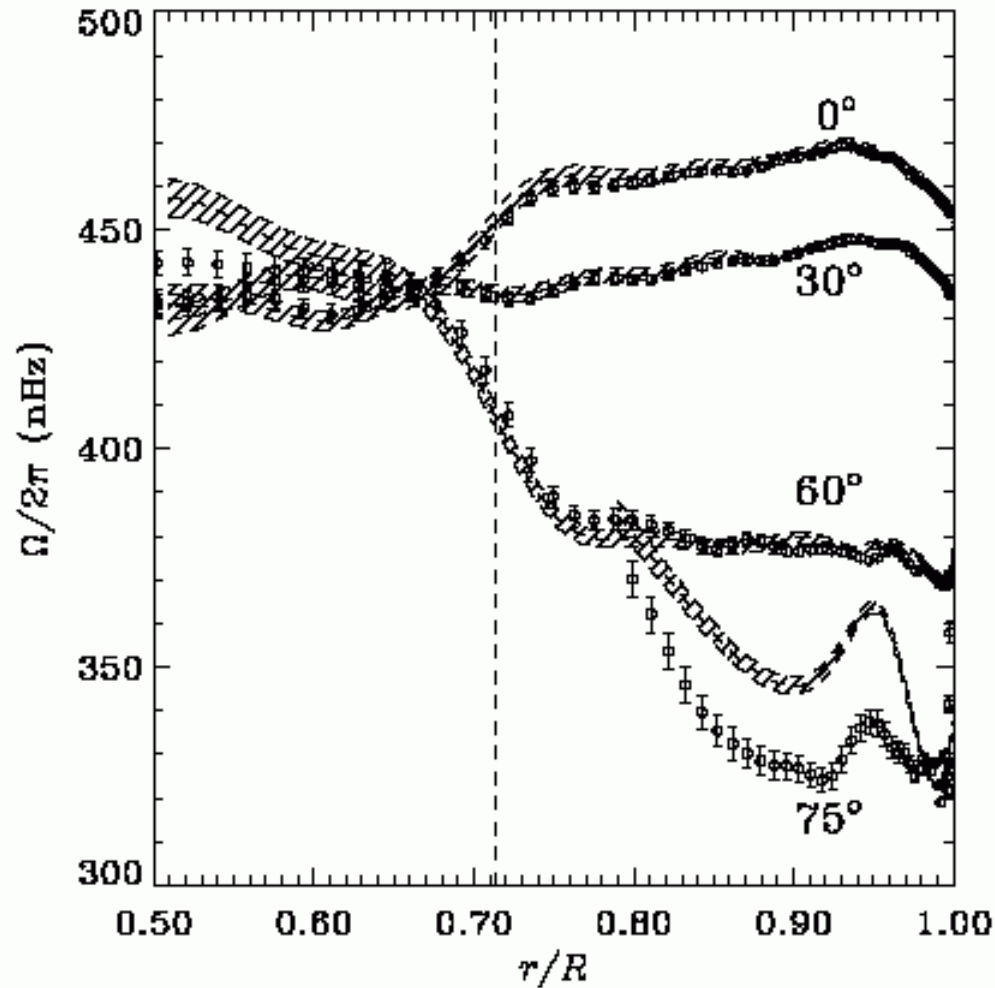
Periodogram dla Słońca z pomiarów prędkości radialnych (eksperyment BiSON)



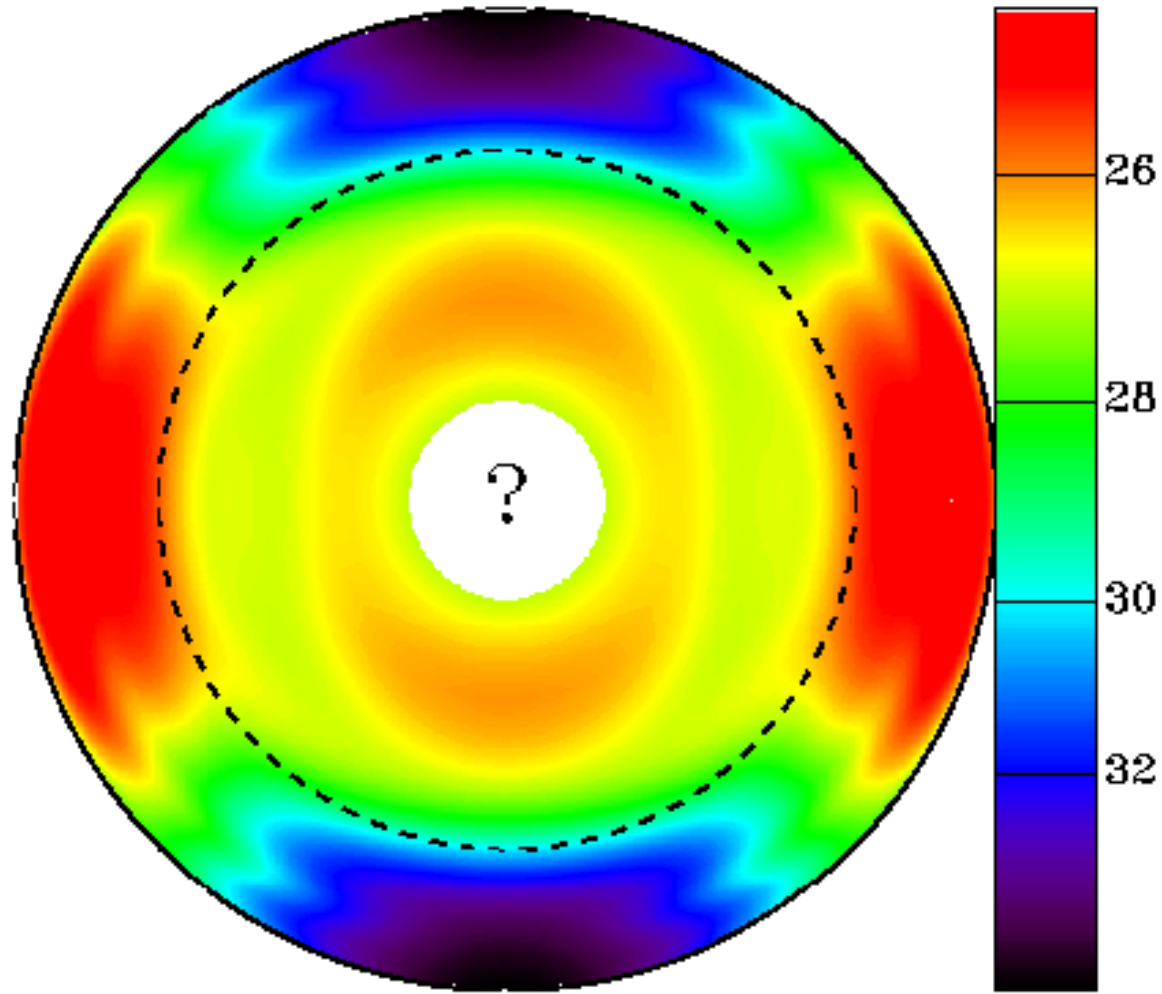
Czego dowiedzieliśmy z heliosejsmologii ?

- **Wiek**
- **Głębokość warstwy konwektywnej**
- **Test tablic nieprzezroczystości, równania stanu**
 - **Obfitość helu**
 - **Profil rotacyjny, $\Omega(r,\theta)$**

Rotacja Słońca w funkcji r , i zaznaczonymi szerokościami heliograficznymi, z danych MDI



Rotacja Słońca



Z równości:

$$P\sqrt{\rho/\rho_{\odot}} = Q$$

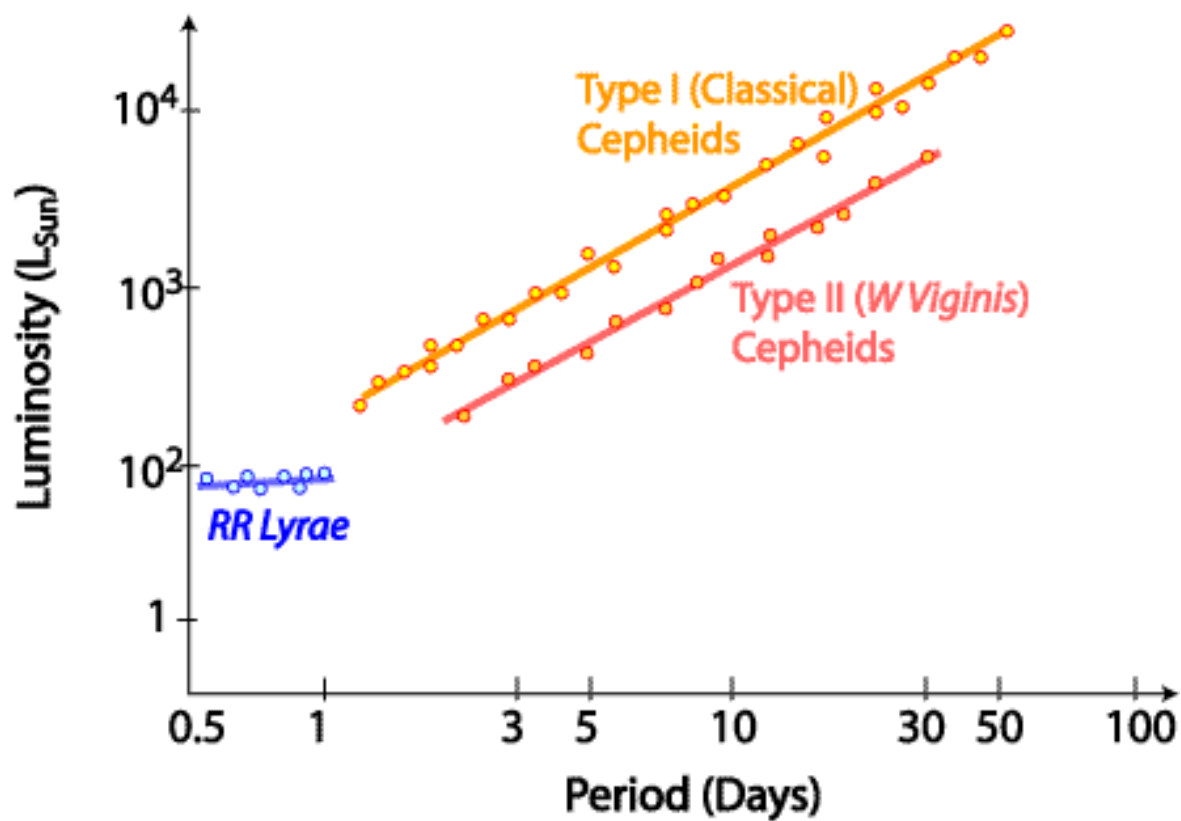
wynika zależność **okres - jasność - barwa**:

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -3.33 \log P + 3.33 \log Q - 10 \log T_{\text{eff}}/T_{\text{eff}\odot} + 5 \log g/g_{\odot}$$

lub

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -3.33 \log P + 3.33 \log Q - 10 \log T_{\text{eff}}/T_{\text{eff}\odot} - 1.67 \log M/M_{\odot}$$

PERIOD - LUMINOSITY RELATIONSHIP



Period - Luminosity Relationship

