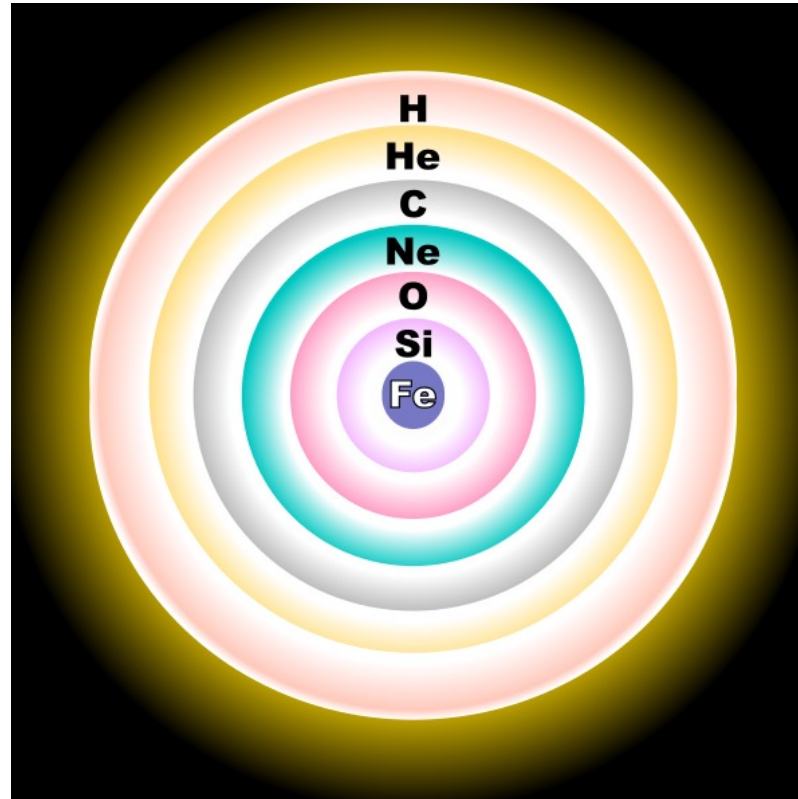


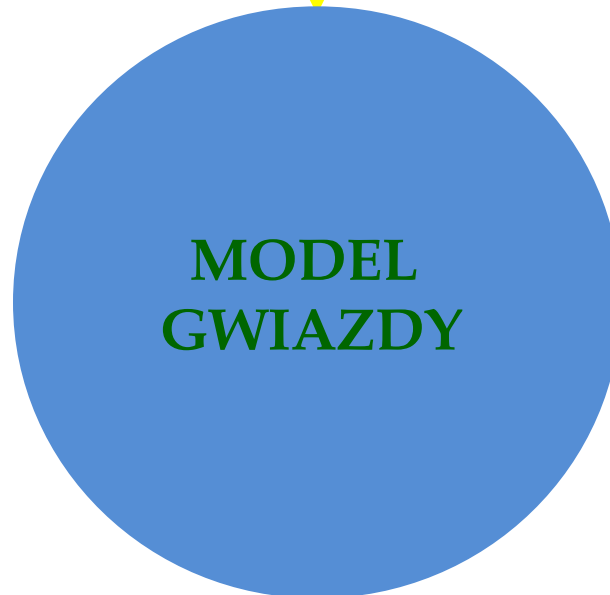
BUDOWA I EWOLUCJA GWIAZD



Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

Semestr letni, 2020/2021

- równania budowy wewnętrznej (ogólne równania hydrodynamiki)
- własności materii (mikrofizyka)
- ograniczenia z obserwacji

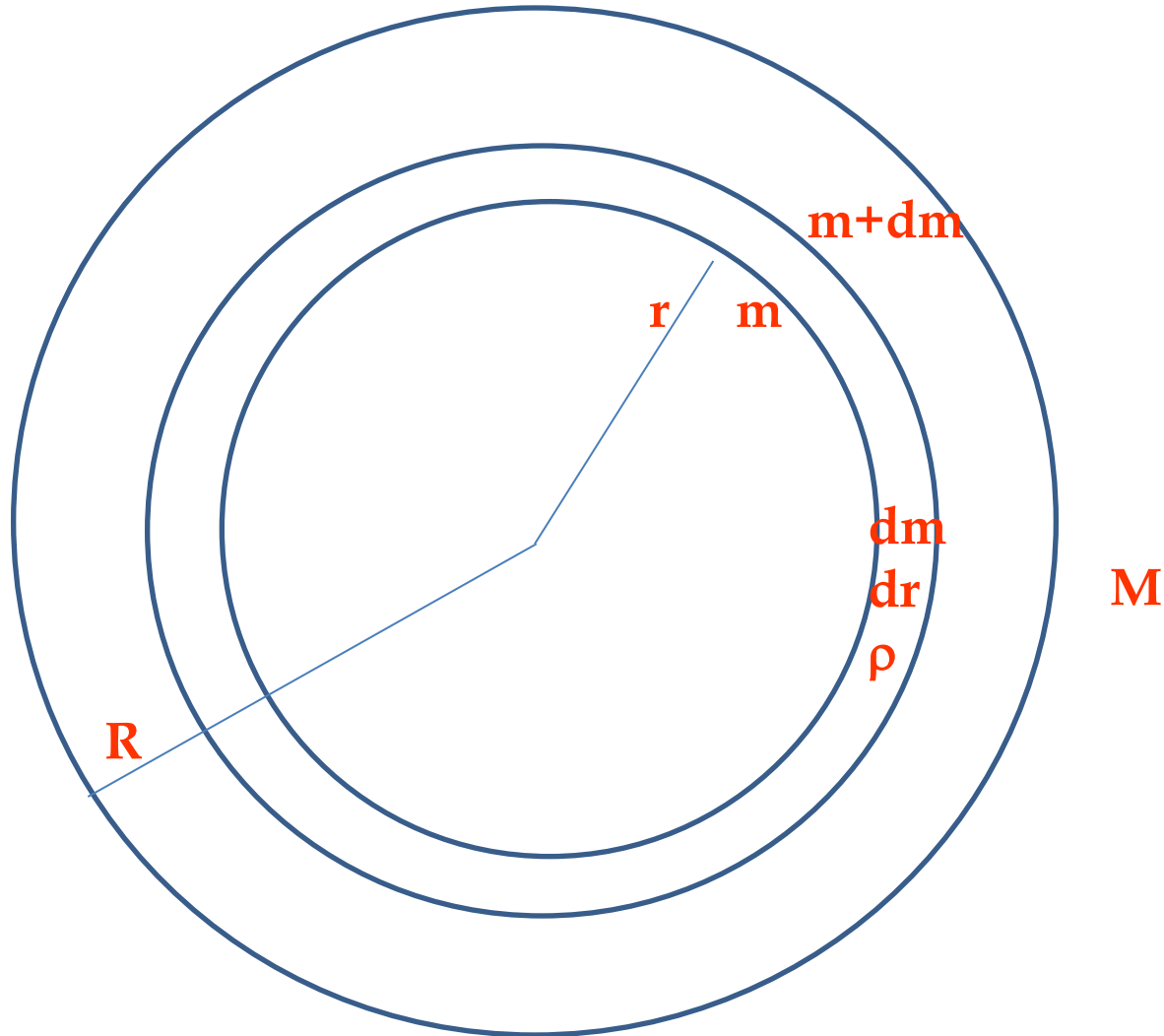


założenia:

symetria sferyczna

~~**rotacja**~~
~~**pole magnetyczne**~~
~~**siły pływowe**~~

masa zawarta w warstwie o grubości dr
 $dm=4\pi r^2\rho dr$



opis Eulera

zmienne (r,t)

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$dm = \underline{4\pi r^2 \rho} dr - \underline{4\pi r^2 \rho v} dt$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi r^2 \rho v$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial r \partial t} = 4\pi r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial t \partial r} = -4\pi \frac{\partial (r^2 \rho v)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho r^2 v)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

opis Lagrange'a

zmienne (m,t)

$$\frac{d}{dt}$$

$$H \approx c \omega \nu A$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial \nu}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_m = \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)_m \frac{\partial}{\partial \nu} + \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)_m$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_m = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_\nu +$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial m} = \frac{1}{4\pi n^2 \rho}$$

**Masa zawarta w warstwie o grubości dr
w odległości r**

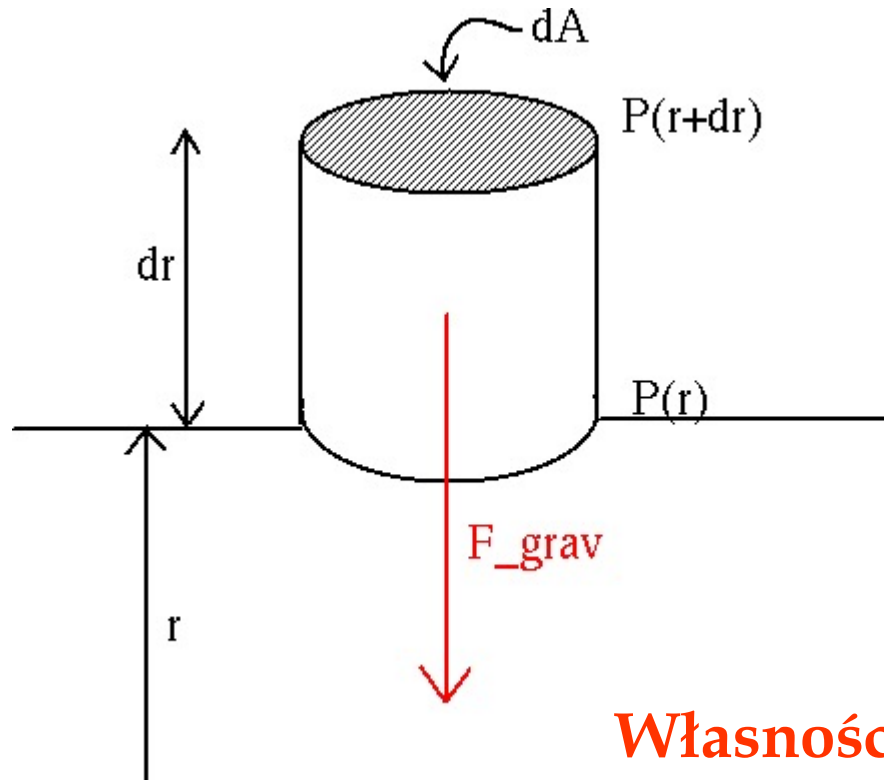
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

opis Eulera

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}.$$

opis Lagrange'a

Równowaga hydrostatyczna



Własności cylindra

Gęstość = $\rho(r)$

Objętość = $dr dA$

Masa = $dm = \rho(r) dr dA$

Siła grawitacji działająca na cylinder

$$F_{grav} = -\frac{GM(r)dm}{r^2}$$

$$= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dA$$

$$F_{grav} = -g(r) \rho(r) dr dA$$

Ciśnienie netto

$$P(r + dr) - P(r)$$

Siła związana z tym ciśnieniem

$$\begin{aligned} F_{press} &= (P(r + dr) - P(r))dA \\ &= dP dA \end{aligned}$$

Siły te muszą równoważyć się

$$F_{press} = F_{grav}$$

$$dP dA = -g(r) \rho(r) dr dA$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

lub

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

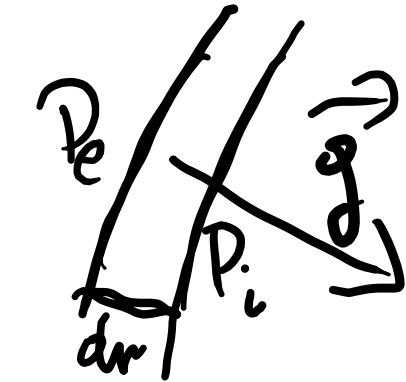
Jak zmienia się ciśnienie, aby powstrzymać kolaps grawitacyjny

Równowaga hydrostatyczna

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g = -\frac{Gm}{r^2} \rho \quad \text{formalizm Eulera}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \text{formalizm Lagrange'a}$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial v} - \rho g$$



$$P_i > P_e$$

$$\rho dv - \rho g dv$$

$$P_i - P_e = \frac{\partial P}{\partial v} dv$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} + \rho g = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = - \frac{6\mu}{4\pi v^4}$$

$$v(0) = 0$$

$$P(\infty) = 0$$

$$\nabla p = \rho (-\nabla \bar{\phi} + \vec{f})$$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 4\pi G \rho$$

$$\vec{f} = \begin{cases} \omega^2 s e_s \\ (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ -\nabla \bar{\phi}_p \end{cases}$$

s. ordinaten
s. Lorentz

$$P = \underbrace{P_{\text{gas}}}_{!} + \underline{P_{\text{rad}}} + \underline{P_{\text{turb}}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \frac{\partial P}{\partial m} = - \frac{G(m)}{4\pi r^2}$$

Z tych dwóch równań możemy:

1) oszacować $P_{\text{cen}}, T_{\text{cen}}$

2) Rozwiązać równanie równowagi hydrostatycznej dla danego $\rho(r)$

$$v, P, \rho$$

$$P, \rho \rightarrow v, \text{stanie}$$

$$\frac{P_0 - P_c}{M} \approx \frac{GM/2}{4\pi(R/2)^4} = \frac{2GM}{\pi R^4} \approx \frac{GM}{R^4}$$

$$P_0 = P(R) = 0$$

$$P_c = P(0)$$

$$P_c \approx \frac{GM^2}{R^4}$$

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$P = \frac{\rho R T}{\mu}$$

$$R = 8,315 \cdot 10^7 \text{ erg K}^{-1} \bar{\rho}^{-1}$$

$$m = Au$$

$$\frac{1}{12} {}^{12}\text{C}$$

$$\bar{m} = \mu u$$

$$\underline{u \approx m_H}$$

$$\rho = N \cdot \bar{m} = N \mu u$$

$$\mu = \frac{\rho}{N m_H}$$

$$T_c = \frac{P_c}{\rho_c} \frac{\mu}{Q} = P_c \frac{\mu}{Q} \frac{\rho}{\rho_c} \frac{4\pi R^3}{3 M} \approx$$

$$\approx \frac{8}{3} \frac{\mu}{Q} \frac{GM}{R} \frac{\rho}{\rho_c} \left[T_c < \frac{8}{3} \frac{GM}{R} \frac{\mu}{Q} \right] \frac{\rho}{\rho_c} < \rho_c < \Delta$$

stała gazowa

$$P_c \approx 10^{16} \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$$

$$1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ N}$$

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

$$\underline{X} + \underline{Y} + \underline{Z} = 1$$

$$X_c = 0.35 \quad Z = 0.02$$

$$\mu_c = 0.85$$

**Z równania równowagi hydrostatycznej
mamy oszacowania**

$$P_c \simeq \frac{GM^2}{R^4}$$

$$T_c = \frac{\mu_c m_u P_c}{k_B \rho_c} \simeq \frac{G \mu_c m_u M}{k_B R} \quad \text{górne oszacowanie}$$

$$P_c \simeq 1.1 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-4} \text{ dyn cm}^{-2},$$

$$T_c \simeq \underline{1.9 \times 10^7} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{\mu_c}{0.85} \right) \text{ K},$$

Obliczenia numeryczne:

$$P_{\text{cen}} \approx 2.4 \cdot 10^{17} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$T_{\text{cen}} \approx 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$$

PODSTAWOWE SKALE CZASOWE

✦ dynamiczna, τ_{dyn}

✦ termiczna (Kelvina-Helmholtza), τ_{th}

✦ nuklearna, τ_{nuc}

Dynamiczna skala czasu

Skala procesów dynamicznych

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \approx \frac{R}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \approx \frac{R}{\tau^2}$$

$$\frac{R}{\tau^2} \approx \frac{GM}{R^2}$$

$$\tau_{\#} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

\approx

$$\frac{1}{\sqrt{G \frac{4}{3} \pi \rho}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = R/2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}$$

~~Dynamiczna skala czasu~~

$$s = \frac{at^2}{2}$$

$$l = \frac{gt^2}{2}$$

$$t^2 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{\frac{2lR^2}{GM}}$$

fuldraline $\tau_{\text{exp}} = \frac{H}{C_s}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{R}{\tau_{\text{exp}}^2} \approx \frac{p}{\rho R}$$

$$\tau_{\text{exp}} \approx \sqrt{\frac{R}{C_s^2}} \approx \frac{R}{C_s}$$

$$C_s^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s =$$

$$= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_s = \Gamma_1 \frac{p}{\rho}$$

$$C_s^2 = \Gamma_1 \frac{p}{\rho}$$

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_s$$



Dynamiczna skala czasu

$$\tau_{\text{dyn}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

$$\tau_{\text{dyn}} \approx 26 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \text{ [min]}$$

$$\tau_{\text{dyn}}^{\odot} = 26 \text{ min}$$

Typowe wartości τ_{dyn} w różnych typach gwiazd:

GWIAZDA	ρ [g/cm ³]	τ_{dyn}
gwiazda neutronowa	10^{15}	0.06 ms
Biały karzeł	10^6	2 s
Słońce	1,41	26 min
Czerwony nadolbrzym	10^{-9}	2 lata

Termiczna skala czasu

Skala procesów termicznych

$$\tau_{th} = \tau_{th} \approx \frac{|E|}{L}$$

$$|E| = \frac{1}{2} \omega L$$

$$\omega L = -\frac{GM^2}{R}$$

$$\tau_{th} \approx \frac{GM^2}{RL}$$

$$\omega L = -2 \cdot 10^{41} \quad J = -2 \cdot 10^{48} \text{ erg}$$

$$\tau_{th} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ lat}$$

Termiczna skala czasu

$$\tau_{\text{th}} \approx \left(\frac{GM^2}{RL} \right)$$

$$\tau_{\text{th}} \approx 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

☉ $\frac{26 \text{ min}}{30 \text{ min hot}} \approx 10^{-12}$
 $\tau_{\text{th}} \gg \tau_{\text{dyn}}$

Lokalnie termiczna skala czasowa, τ_{th} , jest to tempem zmian **entropii** powodowanych odejściem od stanu równowagi termicznej:

$$\tau_{th} = \int_r^R T c_p dM/L$$

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

$$S = k \ln W$$

$$S [J \cdot mol \cdot K]$$

Nuklearna skala czasu

$$\bullet \quad \Delta E = \Delta m c^2$$

Δm $m(4H)$ $m(He)$



$$m_H = 931,5 \text{ MeV}$$

$$\frac{26,7}{4 \cdot 931,5} \approx 0,007$$

$$0,7\%$$

$$\tau_{\text{mic}} = \frac{0,007 \cdot 2 \cdot M c^2}{L}$$

α

10% m_{sun}

$$\alpha = 0,1$$

Nuklearna skala czasu

$$\tau_{\text{nu}} \approx \frac{0.007\alpha M c^2}{L} \quad \alpha \approx 0.1$$

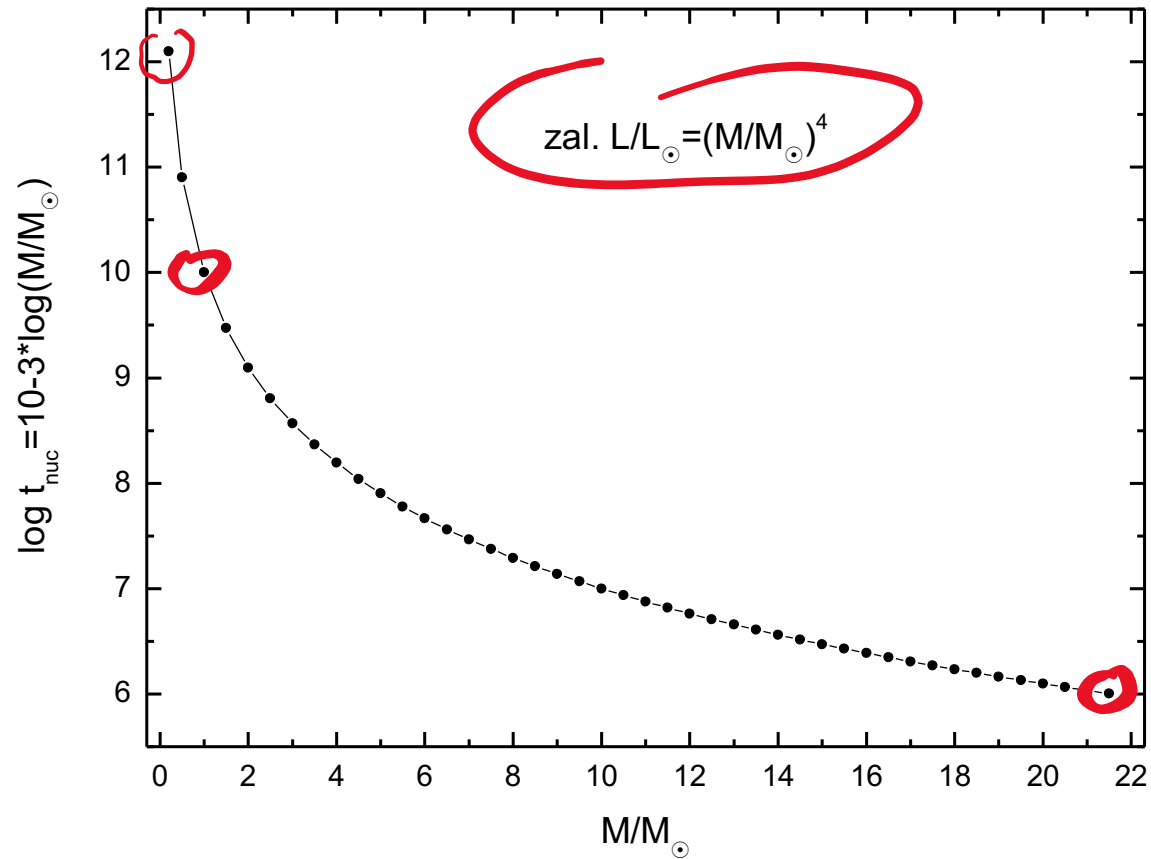
$$\tau_{\text{nu}} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

(M, L)

$$\tau_{\text{Lmc}}^{\odot} = 10^{10} \text{ lat}$$

L - moc prom. gwiazdy

$\tau_{\text{nuc}} \approx$ czas życia gwiazdy na MS



Dla Słońca

$$\tau_{\text{dyn}} \approx 27 \text{ min}$$

$$\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{th}} = 1.6 \cdot 10^{-12}$$

$$\tau_{\text{th}} \approx 3.1 \cdot 10^7 \text{ lat}$$

$$\tau_{\text{th}}/\tau_{\text{nuc}} \approx 3.2 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_{\text{nuc}} \approx 10^{10} \text{ lat}$$

$$\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{nuc}}$$

Tabela 5.1. Parametry i skale czasowe gwiazd wieku zero (ZAMS).
(6.263 + 03 oznacza $6,263 \cdot 10^3$)

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{R}{R_{\odot}}$	T_{eff} [K]	$\frac{L}{L_{\odot}}$	τ_{dyn} [min]	$\tau_{\text{K-H}}$ [rok]	τ_n [rok]
10.0	3.74	26564	6.263 + 03	6.086 + 01	6.664 + 04	1.649 + 07
8.9	3.50	25061	4.345 + 03	5.837 + 01	8.154 + 04	2.118 + 07
7.9	3.28	23599	2.992 + 03	5.597 + 01	1.005 + 05	2.742 + 07
7.1	3.07	22172	2.042 + 03	5.367 + 01	1.250 + 05	3.581 + 07
6.3	2.87	20797	1.383 + 03	5.143 + 01	1.567 + 05	4.712 + 07
5.6	2.69	19476	9.315 + 02	4.932 + 01	1.975 + 05	6.234 + 07
5.0	2.51	18218	6.240 + 02	4.727 + 01	2.504 + 05	8.295 + 07
4.5	2.35	17006	4.153 + 02	4.536 + 01	3.191 + 05	1.111 + 08
4.0	2.20	15853	2.752 + 02	4.356 + 01	4.085 + 05	1.494 + 08
3.5	2.07	14754	1.815 + 02	4.188 + 01	5.248 + 05	2.019 + 08
3.2	1.94	13712	1.192 + 02	4.033 + 01	6.760 + 05	2.739 + 08
2.8	1.82	12717	7.784 + 01	3.889 + 01	8.757 + 05	3.739 + 08
2.5	1.71	11776	5.021 + 01	3.735 + 01	1.151 + 06	5.167 + 08
2.2	1.62	10872	3.278 + 01	3.651 + 01	1.478 + 06	7.053 + 08
2.0	1.53	10002	2.105 + 01	3.563 + 01	1.931 + 06	9.790 + 08
1.8	1.46	9164	1.344 + 01	3.505 + 01	2.523 + 06	1.366 + 09
1.6	1.40	8329	8.449 + 00	3.491 + 01	3.322 + 06	1.937 + 09
1.4	1.36	7489	5.200 + 00	3.536 + 01	4.417 + 06	2.805 + 09
1.3	1.28	6795	3.125 + 00	3.421 + 01	6.202 + 06	4.161 + 09
1.1	1.13	6311	1.818 + 00	3.013 + 01	9.576 + 06	6.374 + 09
1.0	0.99	5872	1.037 + 00	2.600 + 01	1.530 + 07	9.963 + 09
0.9	0.87	5435	5.916 - 01	2.281 + 01	2.414 + 07	1.556 + 10
0.8	0.78	4975	3.367 - 01	2.064 + 01	3.743 + 07	2.437 + 10
0.7	0.71	4555	1.921 - 01	1.870 + 01	5.780 + 07	3.805 + 10
0.6	0.62	4274	1.141 - 01	1.622 + 01	8.834 + 07	5.712 + 10
0.6	0.53	4084	7.138 - 02	1.385 + 01	1.295 + 08	8.136 + 10
0.5	0.46	3954	4.729 - 02	1.188 + 01	1.787 + 08	1.094 + 11
0.4	0.41	3862	3.339 - 02	1.040 + 01	2.283 + 08	1.382 + 11

Zero Age
Main
Sequence

$$X_c = 0.70$$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

Twierdzenie o wiriale

VIS mec. energie, site

1870

Rudolf Clausius

$$W = \frac{1}{2} \sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$m_i \vec{p}_i \quad \vec{r}_i \quad F_i$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_i = \vec{F}_i$$

$$\sum p_i v_i$$

$$\frac{d}{dt} \sum p_i v_i = \sum \frac{dp_i}{dt} v_i \text{ (1)} + \sum p_i \frac{dv_i}{dt} \text{ (2)}$$

Twierdzenie o wiriale

$$\frac{d}{dt} \sum p_i r_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \frac{dr_i}{dt} r_i = \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\underline{m_i \cdot r_i^2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2}$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$\textcircled{1} \sum \frac{dp_i}{dt} \cdot r_i = \sum F_i \cdot r_i$$

$$\sum F_i \cdot r_i = \sum (F_{ij} r_i + F_{ji} r_j) =$$

$$= \sum \vec{F}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

$$\sum F_i r_i = - \sum \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} r_{ij}^2 = - \sum \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = -2W$$

Twierdzenie o wiriale

$$\textcircled{2} \quad \overline{\sum p_i \frac{d\vec{r}}{dt}} = \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum m v_i^2 = 2\overline{E_k}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \omega L + 2\overline{E_k} \quad !$$

$$\overline{I} = \omega \overline{m r^2}$$

$$\overline{E_k} = -\frac{1}{2} \omega L$$

Twierdzenie o wiriale jako konsekwencja równania równowagi hydrostatycznej

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad | \cdot 4\pi r^3 \quad i \quad \int_0^M$$

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

$$\Omega = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = - \int_0^R \frac{Gm}{r} 4\pi r^2 \rho dr$$

$$L = \left[4\pi r^3 P \right]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dm} P dm \quad P(R) = 0$$

$$= - \int_0^M \frac{12\pi r^2}{4\pi r^2} P dm = -3 \int_0^M P dm$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$P = NkT = \frac{\rho kT}{\mu} = \frac{\rho RT}{\mu}$$

Twierdzenie o wiriale jako konsekwacja
równania równowagi hydrostatycznej

$$-3 \int_0^R \frac{kT}{m} dm = - \int_0^R \frac{Gm}{r} dm$$

$$\frac{3}{2} kT$$

$$\frac{3}{2} \frac{kT}{m}$$

$$E_k = \int_0^R \left(\frac{3}{2} \frac{kT}{m} \right) 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{1}{2} E_k = -W$$

$$E_{int} = -\frac{1}{3} \Phi W$$

$$\Phi = \frac{3}{2}$$

Twierdzenie o wiriale

$$E_k = -\frac{1}{2} \Omega$$

$$E = U + \Omega$$

Gaz jednoatomowy doskonały: $E_k = U$

$$E = E_k + \Omega = -E_k = \frac{1}{2} \Omega$$

$$E = U + \Omega = -U = \frac{1}{2} \Omega$$

$$U = \frac{1}{2} \Omega$$

Wnioski z twierdzenie o wiriale

- * pozwala nam zrozumieć etapy ewolucji, gdy nie ma źródeł energii jądrowej
- * powierzchnia gwiazdy jest gorąca, zatem traci ona energię
- * jedynym źródłem energii jest uwalnianie grawitacyjnej energia potencjalnej z kontrakcji
- * gwiazda staje się coraz bardziej związane grawitacyjnie (R maleje)
- * Gwiazda ma ujemne ciepło właściwe: utarta energii powoduje wzrost temperatury

$$\Omega \searrow \quad U \nearrow \quad U = c \sqrt{T} \Rightarrow T \nearrow$$

$$L \approx \frac{I\dot{\theta}}{t}$$

$$L_{\text{centr}} = -\frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt} \left[\frac{\text{erg}}{\text{s}} \right]$$

$$\Omega \approx -\frac{GM^2}{R}$$

$$L_{\text{centr}} = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = -2 \frac{R}{\tau_{\text{th}}}$$

$$\tau_{\text{th}} = \frac{GM^2}{RL}$$

równanie zachowania energii

$$\epsilon \quad \left[\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{g}} \right]$$



$$dL = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$dQ = dE + p dV$$

$$dQ = T dS$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$$

$$V = \frac{1}{\rho}$$

n. bilansu

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \rho \epsilon - \text{div } \vec{T} \rightarrow$$

równanie zachowania energii

$$\text{zgodnie z} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 T_n)}{dr} = \rho \varepsilon - \rho \frac{dE}{dt} + \frac{\rho}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dL_n}{dr} = 4\pi n^2 \left(\rho \varepsilon - \rho \frac{dE}{dt} + \frac{\rho}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) / 4\pi n^2 \rho$$

ε_g

$$\frac{dL_n}{dm} = \varepsilon + \varepsilon_g - \varepsilon_v$$

$$L_v = 4\pi n^2 T_n$$

równanie zachowania energii

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \left[\rho \epsilon - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right]$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon - \epsilon_\nu + \epsilon_g$$

L_r - strumień energii płynący przez warstwę o promieniu r

ϵ - tempo produkcji energii w reakcjach jądrowych

ϵ_ν - chłodzenie związane z emisją neutrin

ϵ_g - energia zużywana na ekspansję i kurczenie $\epsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}$

Równowaga termiczna

$$\cancel{\varepsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}} \quad \cancel{\varepsilon_\nu}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon$$

Przyrost strumienia promieniowania w warstwie o masie dm jest równy energii wyprodukowanej przez te warstwę w reakcjach jądrowych

Transport energii

Promieniowanie

Fotony

Przewodnictwo

atomy, elektrony

Konwekcja

bąble materii

Transport promienisty

Przybliżenie dyfuzyjne

$$F_{\text{dyf}} = -D \nabla N, \text{ gdzie } D = (v l) / 3$$

Fotony:

$$v \rightarrow c$$

$$l \rightarrow l_{\text{ph}} = 1 / (\kappa \rho)$$

$$N = U_{\text{rad}} = a T^4$$

$$F_{\text{rad}} = - \frac{4acT^3}{3 \kappa \rho} \nabla T$$

$$\frac{1}{\kappa \rho}$$

$$\frac{dU}{dv}$$

Równanie transportu energii

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla,$$

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\sigma G} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

transport promienisty

jeśli

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$$

transport konwektywny

$$L_r = 4\pi r^2 (\underline{F_{\text{rad}}} + \underline{F_{\text{conv}}} + \underline{F_{\text{cond}}})$$

Zmiana składu chemicznego

Zazwyczaj uwzględniamy tylko zmiany składu chemicznego powodowane przez reakcje jądrowe.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right]$$

r_{ji} - tempo powstawania izotopu i z izotopu j

r_{ik} - tempo przemiany izotopu i w izotop k

Dane mikrofizyki

- równanie stanu, $P=P(\rho, T, X_i)$
- nieprzezroczystości materii, $\kappa=\kappa(\rho, T, X_i)$
- tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$
- tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, X_i)$

$$n \approx \sum_j \sum_i \sigma_{ij} n_{i,j} \quad h\nu$$

Równanie stanu $P=P(\rho, T, X_i)$

Gaz doskonały

$$P = NkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

dla gwiazd masywnych

Ciśnienie promieniowania

$$P = \rho kT / (\mu m_H) + aT^4 / 3$$

Gaz zdegenerowany

$\rho \neq f(T)$

wierchowy

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

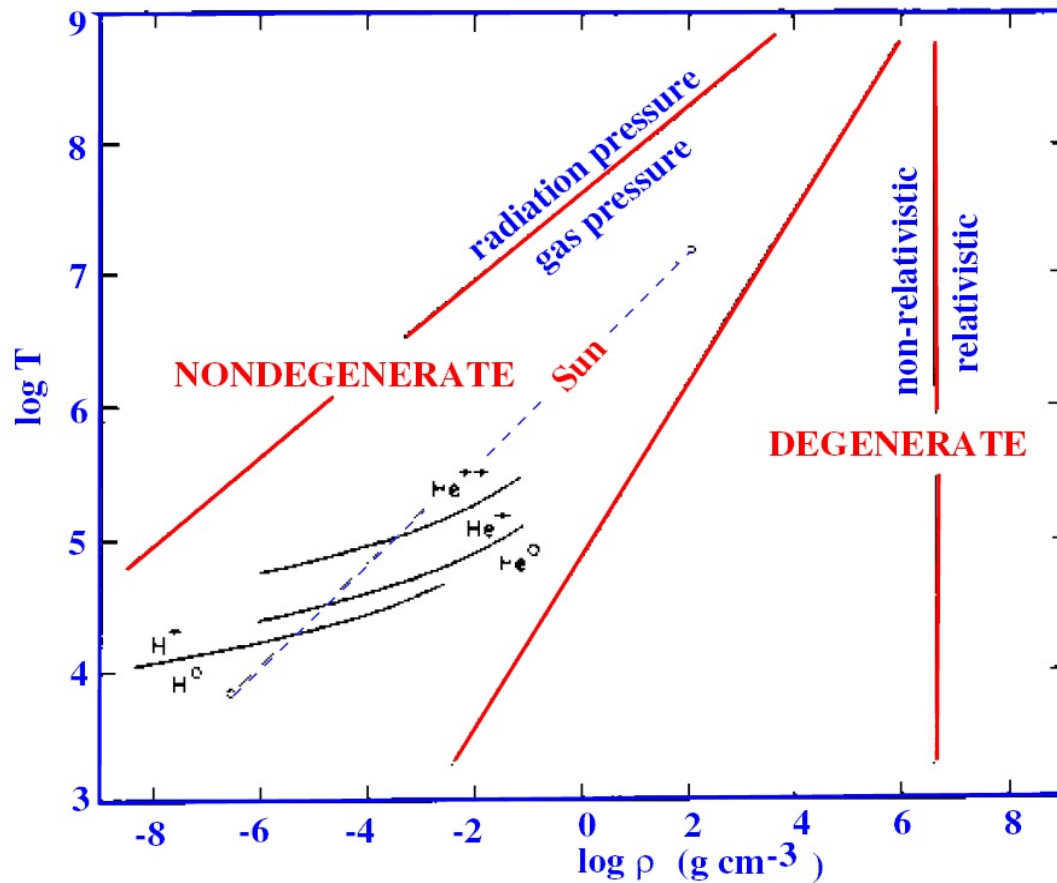
$$K_{NR} = \frac{h^2}{20m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} = 1.0036 \times 10^{13} \text{ [cgs]}$$

relatywny

$$P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

$$K_{ER} = \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} = 1.2435 \times 10^{15} \text{ [cgs]}$$

Równanie stanu



nieprzezroczystość materii, κ , zależy od

- ◆ **temperatury**
- ◆ **gęstości**
- ◆ **składu chemicznego**

nieprzezroczystość determinuje transport promieniowania przez materię

Wysokie temperatury

$$\kappa = 0.02(1+X) \text{ (rozp. Thomsona)}$$

Pośrednie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho T^{-3.5} \text{ (wzór Kramersa)}$$

bardzo niskie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^4$$

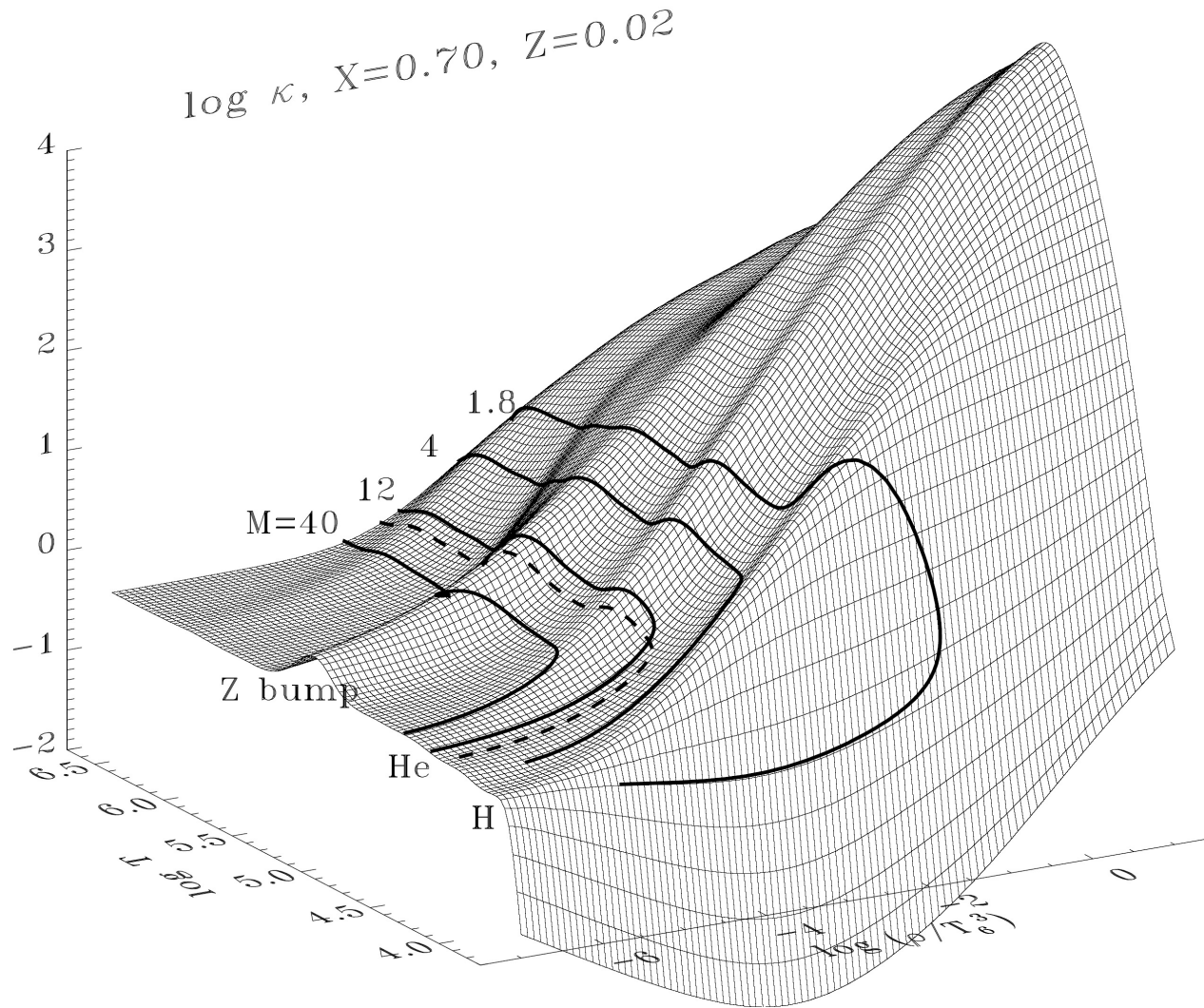
W praktyce liczy się prawdopodobieństwa procesów, w których foton o energii $h\nu$ zostanie pochłonięty lub rozproszony.

metody perturbacyjne mechaniki kwantowej



przekroje czynne dla różnych procesów

Nieprzezroczystość, κ (OPAL), w zależności od $\log T$ i $\log \rho/T_6^3$ ($T_6 = T/10^6$)



Tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$

- ✘ tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, X_i)$
- ✘ strumień neutrin
- ✘ zmiany składu chemicznego

Prawdopodobieństwo przeniknięcia bariery kulombowskiej (współczynnik Gamowa)

$$P_p(v) \propto \exp[-(4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2 / hv)]$$

Tempo produkcji energii $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^{\eta_1} T^{\eta_2}$ erg/g/s

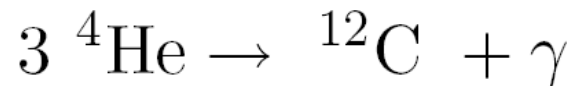
przemiana wodoru w hel



Cykl p-p $\varepsilon_{\text{PP}} \simeq \varepsilon_1 X_{\text{H}}^2 \rho T^{14}$

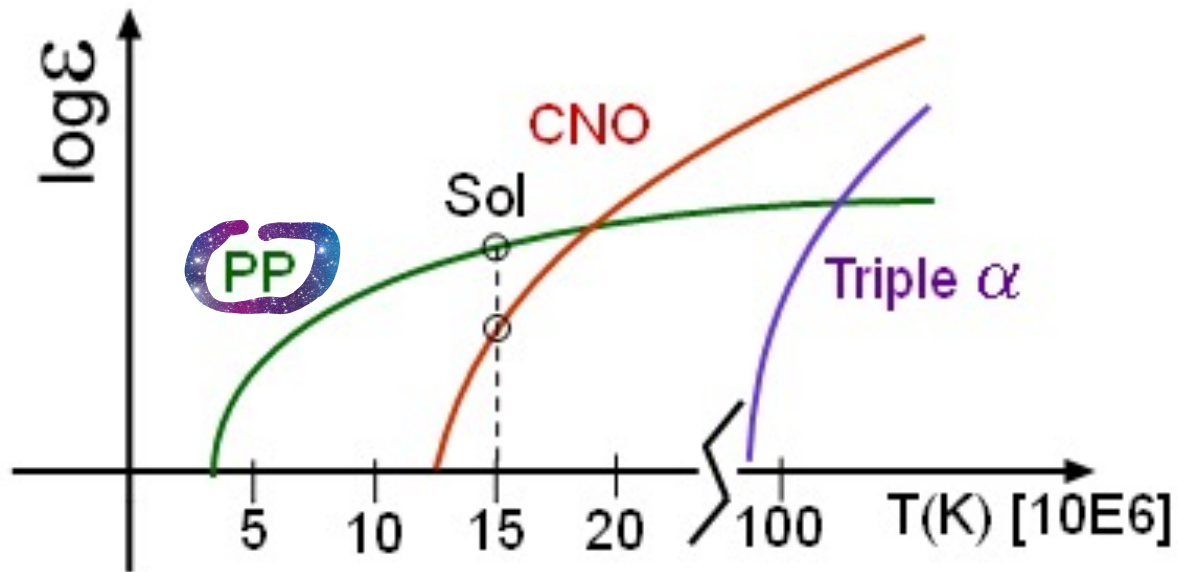
Cykl CNO $\varepsilon_{\text{CNO}} \simeq \varepsilon_2 X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} \rho T^{20}$

przemiana helu w węgiel



Reakcja 3 α $\varepsilon_{3\alpha} \simeq \varepsilon_3 X_{\text{He}}^3 \rho^2 T^{30}$

Wydajność energetyczna reakcji



RÓWNANIA BUDOWY WEWNĘTRZNEJ I EWOLUCJI

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\mu$$

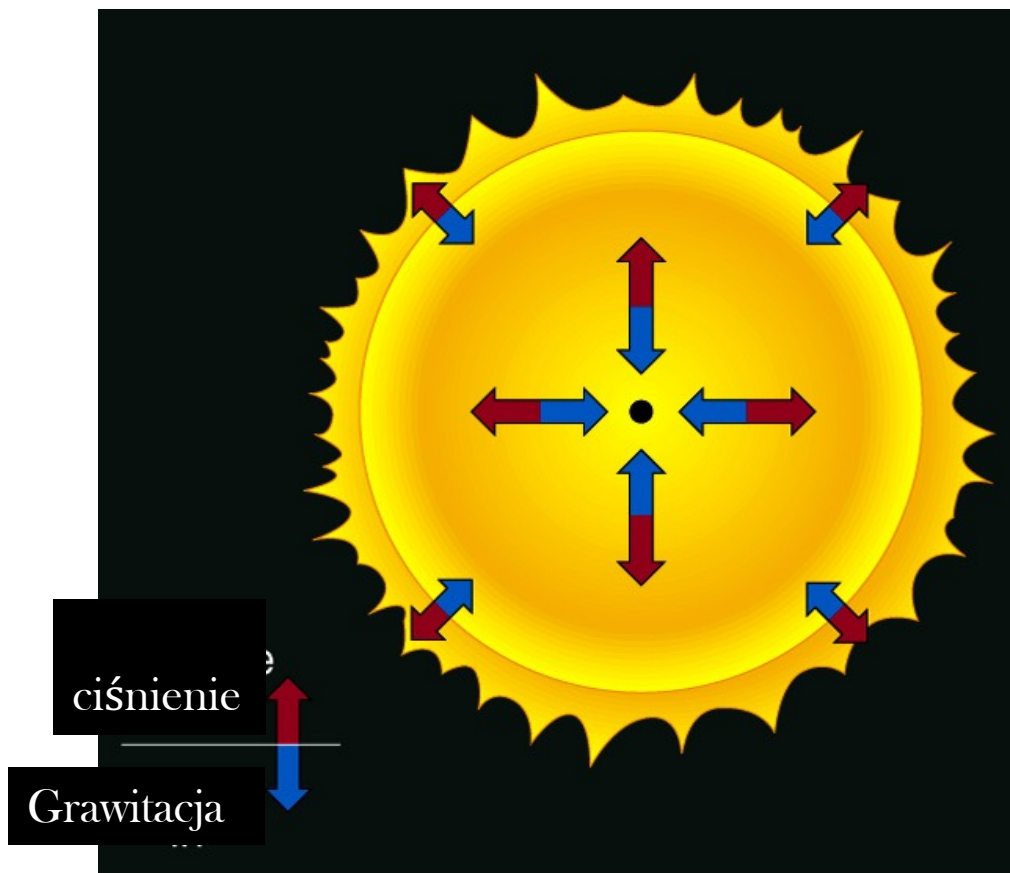
$$P(p, T, X_i)$$

$$r_{ij}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \Delta\nabla & \text{if } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) \quad [+ \text{ mixing terms}] \quad i = 1 \dots N$$

Równowaga hydrostatyczna



$$\cancel{\frac{dv}{dt}}$$

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Równowaga termiczna

$$\cancel{\varepsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}} \quad \cancel{\varepsilon_\nu}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon$$

Przyrost strumienia promieniowania w warstwie o masie dm jest równy energii wyprodukowanej przez tę warstwę w reakcjach jądrowych

Warunki brzegowe

W centrum: $m=0 \rightarrow r=0, L_r=0$

Na powierzchni: $m=M \rightarrow P=0, T=T_S=(L/8\pi R^2\sigma)^{1/4}$

W centrum gwiazdy musimy dopasować:

gęstość centralną ρ_c oraz temperaturę centralną T_c .

Natomiast na powierzchni gwiazdy:

promień R oraz moc promieniowania L .

ρ_c, T_c

Tylko (R i L) mogą być wyznaczone z obserwacji.

$$\underline{T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)}$$

$$d\tau_v = n_v \rho dv$$

$$\tau = 0$$

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4$$

$$T(0) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} T_{\text{eff}}$$

" 0.84

$$\rho = 10^{-12}$$

$$T = T_{\text{eff}} \Rightarrow \tau = \frac{2}{3}$$

Mamy 4+I równań różniczkowych na 4+I niewiadome: $r, P, T, L_r, X_1, \dots, X_I$ w funkcji (m, t)

Dla danego ΣX_i i czasu t , rozwiązujemy równania na r, P, T, L_r . (w)

Kolejny model w czasie $t+\Delta t$ ma skład:

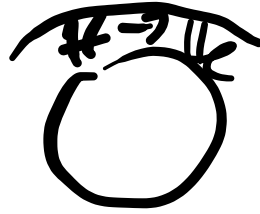
$$\underline{X(m, t+\Delta t)} \approx \underline{X(m, t)} + \Delta t r_X(m, t)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(m, t) - P(m, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dP}{dm} = \frac{P_i - P_{i-1}}{m_i - m_{i-1}}$$

Δt

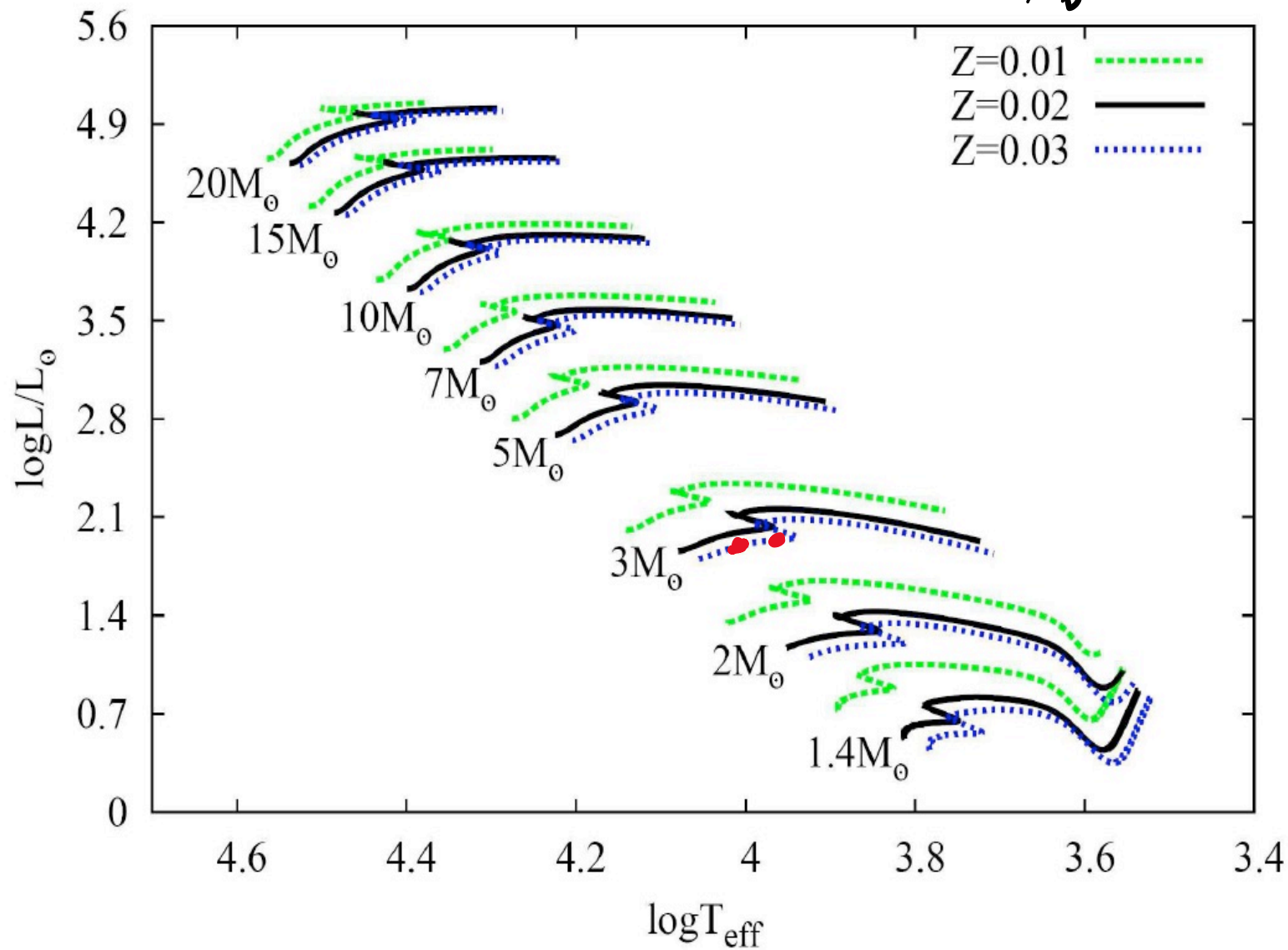
|||||
|||||



Dostajemy ciąg modeli ewolucyjnych, w którym model w czasie t_i zależy od modelu w czasie t_{i-1} .

Parametrem odróżniającym modele jest masa.

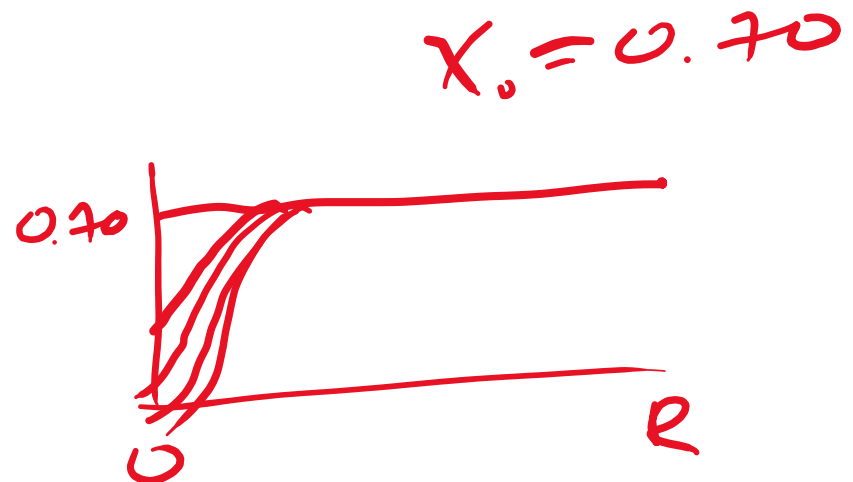
$X_{\odot} = 0.70$



Gwiazda ciągu głównego wieku zero

Gwiazda, która „zapaliła” już wodór, a jego „spalanie” wytwarza tyle energii ile jest wypromieniowanej z powierzchni. Jednocześnie nie ma jeszcze pomniejszenia obfitości wodoru.

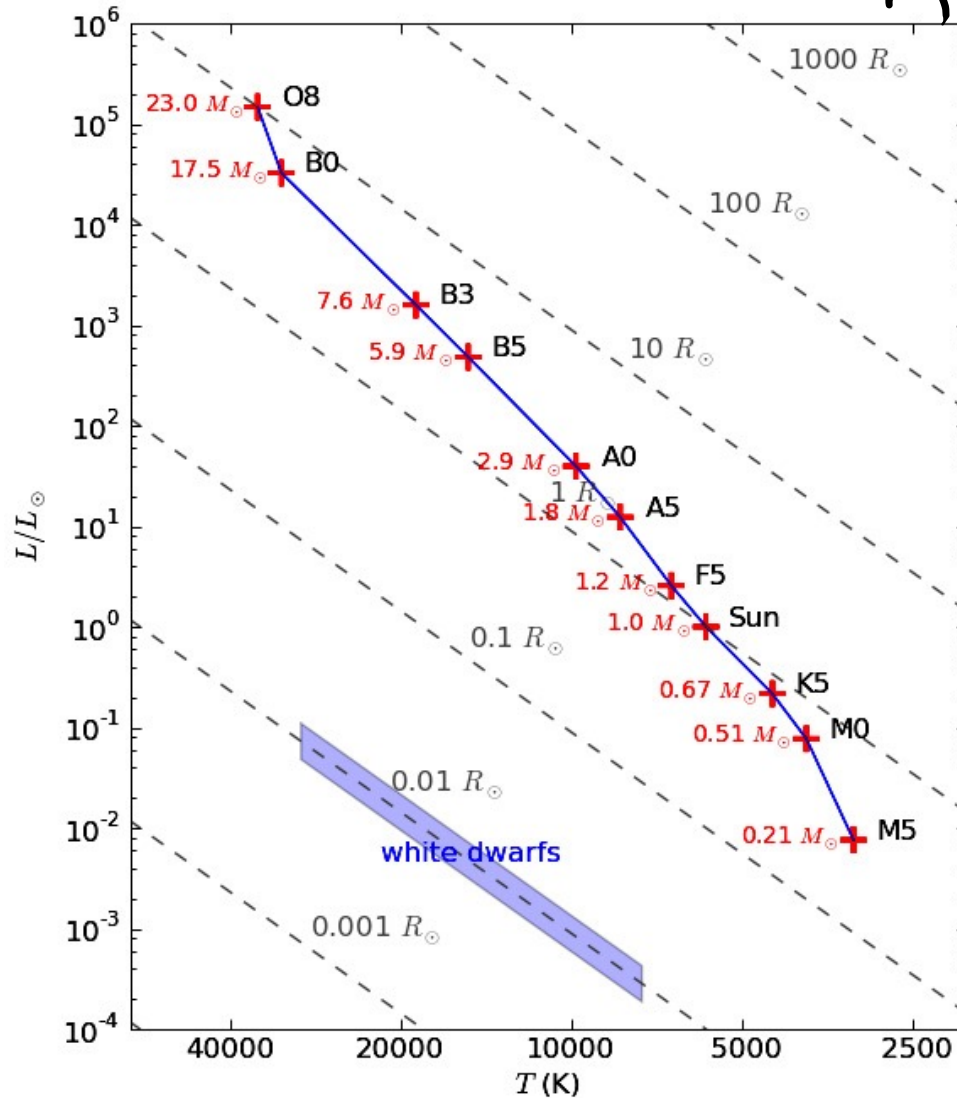
Gwiazda w równowadze hydrostatycznej, termicznej i chemicznie jednorodna.



ciąg główny wieku zero i linie stałych promieni

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

$$\log L = \dots 4 \log R + 4 \log T_{\text{eff}}$$



$$R = 100 R_{\odot}$$

$$10 R_{\odot}$$

$$1 R_{\odot}$$

Ciąg główny wieku zero (ZAMS=Zero Age Main Sequence)

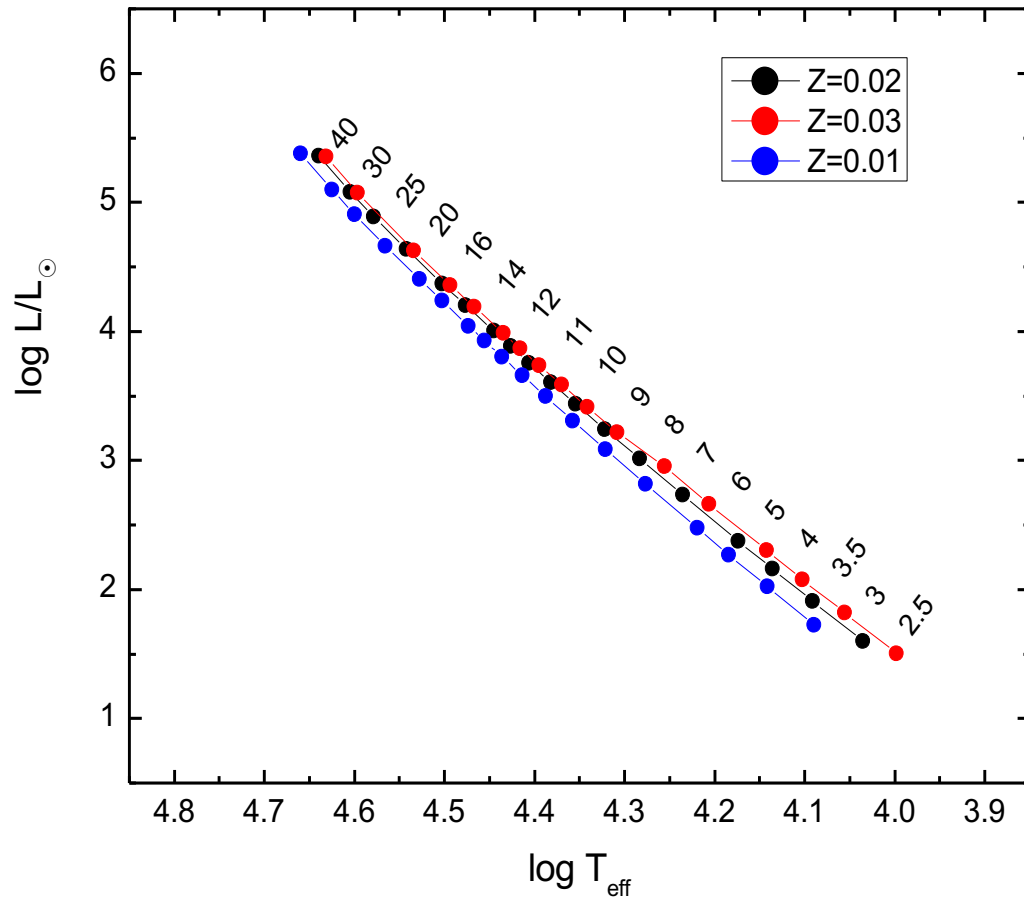
X=0.70, Z=0.02, κ OPAL, GN93, OPAL EOS, $\alpha_{\text{conv}}=1.0$, $V_{\text{rot}}=0.0$

M	lg(t)	<u>lgTs</u>	lgTeff	lg L	<u>lggeff</u>	lgTc	lgRhoc	Xc	<u>Mc/M</u>
1.0	0.0000	3.6505	3.7262	-0.1368	4.4309	7.1335	1.9265	.7000000	.0000
1.1	0.0000	3.6746	3.7503	0.0672	4.3646	7.1680	1.9355	.7000000	.0007
1.2	0.0000	3.6983	3.7740	0.2515	4.3129	7.1995	1.9405	.7000000	.0110
1.3	0.0000	3.7229	3.7986	0.4163	4.2814	7.2272	1.9401	.7000000	.0287
1.7	0.0000	3.8307	3.9064	0.9269	4.3185	7.3000	1.8834	.7000000	.1083
2.0	0.0000	3.8882	3.9639	1.2149	4.3310	7.3297	1.8155	.7000000	.1444
2.5	0.0000	3.9599	4.0357	1.5989	4.3311	7.3617	1.7034	.7000000	.1792
3.0	0.0000	4.0152	4.0911	1.9061	4.3248	7.3842	1.6051	.7000000	.2015
4.0	0.0000	4.0982	4.1741	2.3773	4.3106	7.4164	1.4463	.7000000	.2281
5.0	0.0000	4.1592	4.2352	2.7309	4.2983	7.4397	1.3241	.7000000	.2461
6.0	0.0000	4.2070	4.2830	3.0119	4.2878	7.4578	1.2263	.7000000	.2614
7.0	0.0000	4.2458	4.3219	3.2431	4.2790	7.4726	1.1464	.7000000	.2751
8.0	0.0000	4.2783	4.3544	3.4388	4.2713	7.4850	1.0790	.7000000	.2887
9.0	0.0000	4.3058	4.3820	3.6068	4.2648	7.4955	1.0217	.7000000	.3006
10.0	0.0000	4.3298	4.4060	3.7544	4.2590	7.5047	0.9719	.7000000	.3158
12.0	0.0000	4.3692	4.4453	4.0015	4.2487	7.5197	0.8890	.7000000	.3420
14.0	0.0000	4.4008	4.4770	4.2027	4.2409	7.5319	0.8235	.7000000	.3701
16.0	0.0000	4.4267	4.5029	4.3707	4.2344	7.5420	0.7695	.7000000	.3965
20.0	0.0000	4.4666	4.5426	4.6377	4.2235	7.5578	0.6856	.7000000	.4452
25.0	0.0000	4.5023	4.5784	4.8879	4.2132	7.5724	0.6084	.7000000	.4996
30.0	0.0000	4.5282	4.6043	5.0802	4.2038	7.5835	0.5502	.7000000	.5447
40.0	0.0000	4.5632	4.6393	5.3616	4.1873	7.5993	0.4653	.7000000	.6186
60.0	0.0000	4.5991	4.6752	5.7188	4.1500	7.6189	0.3580	.7000000	.7151
90.0	0.0000	4.6141	4.6902	6.0366	4.0687	7.6357	0.2609	.7000000	.7938

lg L / lg M

slope constant

ZAMS



Twierdzenie Vogta–Russell'a:

- 1) **każdej konfiguracji o danym składzie chemicznym i danej masie odpowiada jeden ściśle określony punkt na diagramie H–R, przy czym różnym masom odpowiadają różne punkty**

- 2) **z materii o danej masie i ustalonym składzie chemicznym można zbudować tylko jedną trwałą gwiazdę**

NIE ZAWSZE JEST SPEŁNIONE