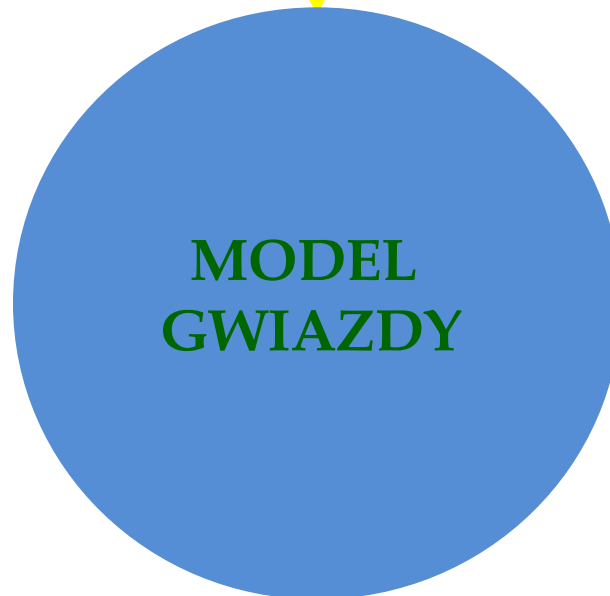


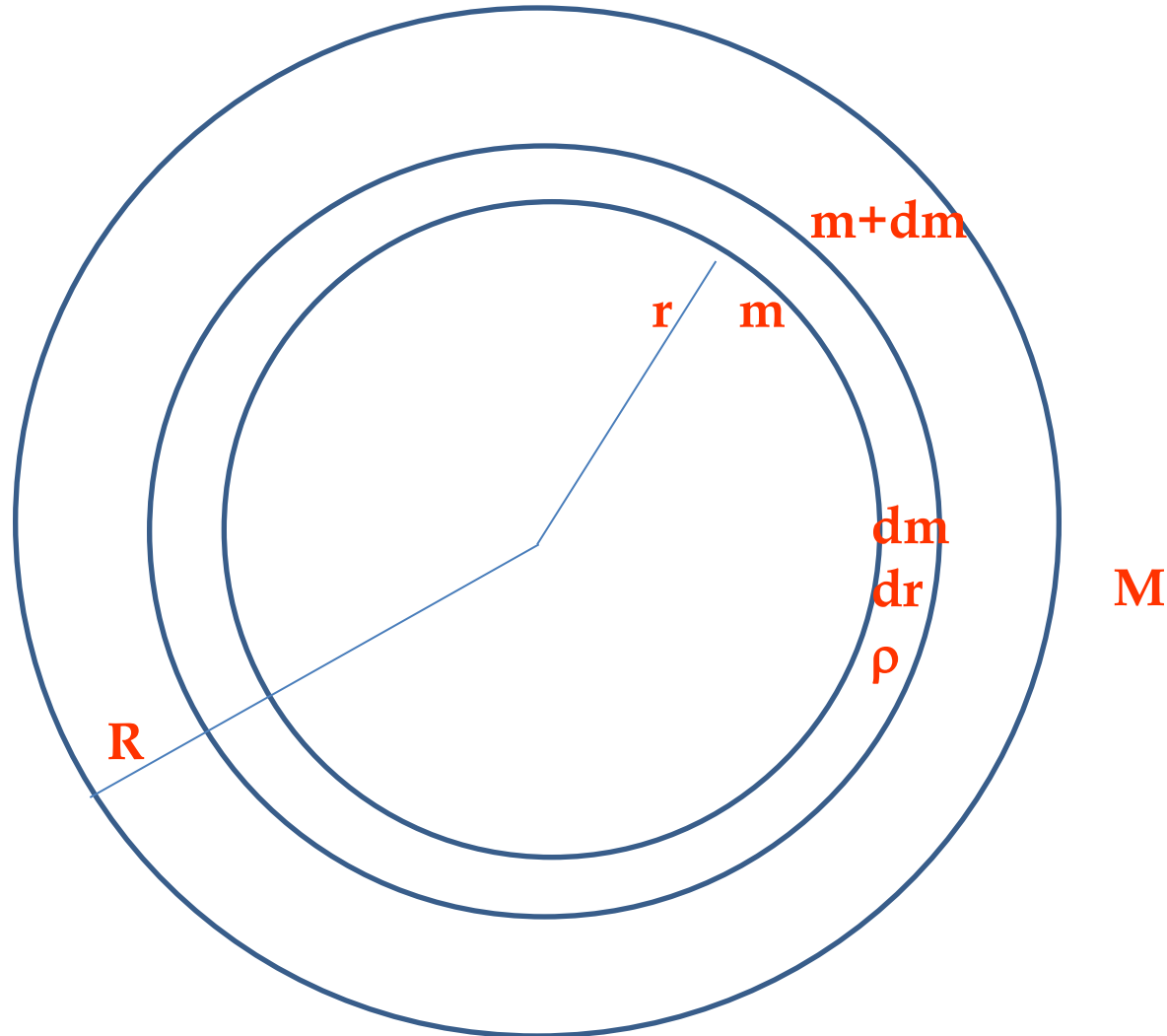
- równania budowy wewnętrznej (ogólne równania hydrodynamiki)
- własności materii (mikrofizyka)
- ograniczenia z obserwacji



założenie: symetria sferyczna

~~**rotacja**
pole magnetyczne
siły pływowe~~

masa zawarta w warstwie o grubości dr
 $dm=4\pi r^2\rho dr$



**Masa zawarta w warstwie o grubości dr
w odległości r**

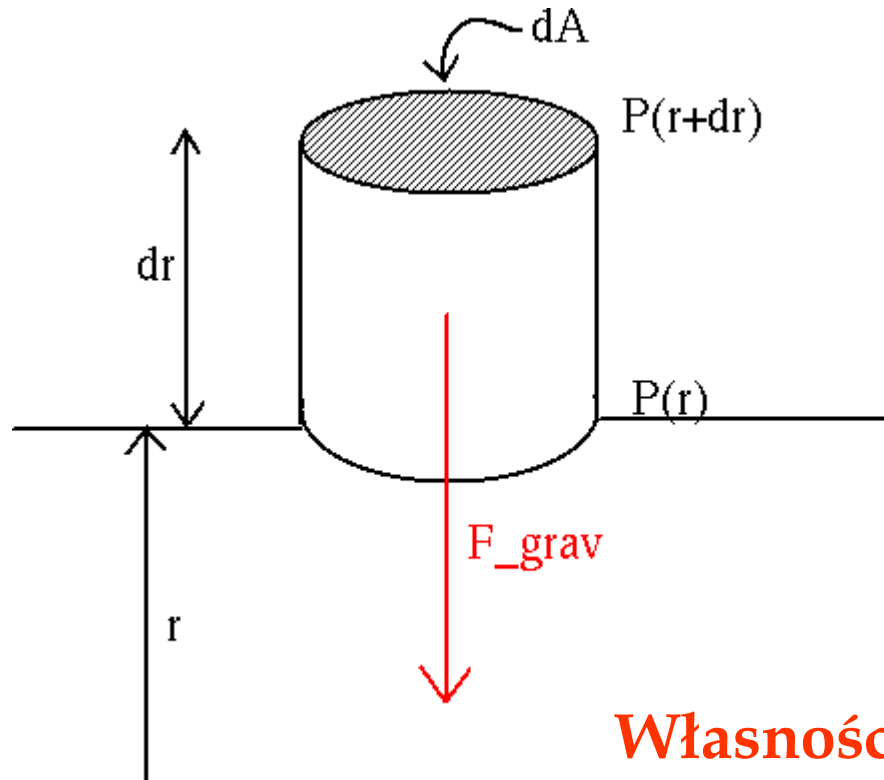
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

opis Eulera

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}.$$

opis Lagrange'a

Równowaga hydrostatyczna



Własności cylindra

Gęstość = $\rho(r)$

Objętość = $dr dA$

Masa = $dm = \rho(r) dr dA$

Siła grawitacji działająca na cylinder

$$\begin{aligned} F_{grav} &= -\frac{GM(r)dm}{r^2} \\ &= -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)drdA \end{aligned}$$

$$F_{grav} = -g(r)\rho(r)drdA$$

Ciśnienie netto

$$P(r + dr) - P(r)$$

Siła związana z tym ciśnieniem

$$\begin{aligned} F_{press} &= (P(r + dr) - P(r))dA \\ &= dP dA \end{aligned}$$

Siły te muszą równoważyć się

$$F_{press} = F_{grav}$$

$$dP dA = -g(r) \rho(r) dr dA$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

lub

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Jak zmienia się ciśnienie, aby powstrzymać kolaps grawitacyjny

Równowaga hydrostatyczna

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g = -\frac{Gm}{r^2} \rho \quad \text{formalizm Eulera}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \text{formalizm Lagrange'a}$$

Z tych dwóch równań możemy:

1) oszacować P_{cen} , T_{cen}

2) Rozwiązać równanie równowagi hydrostatycznej dla danego $\rho(r)$

**Z równania równowagi hydrostatycznej
mamy oszacowania**

$$P_c \simeq \frac{GM^2}{R^4}$$

$$T_c = \frac{\mu_c m_u P_c}{k_B \rho_c} \simeq \frac{G \mu_c m_u M}{k_B R}$$

$$P_c \simeq 1.1 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-4} \text{ dyn cm}^{-2},$$
$$T_c \simeq 1.9 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{\mu_c}{0.85} \right) \text{ K},$$

Obliczenia:

$$P_{\text{cen}} = 2.4 \cdot 10^{17} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$T_{\text{cen}} = 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$$

PODSTAWOWE SKALE CZASOWE

✦ dynamiczna, τ_{dyn}

✦ termiczna (Kelvina-Helmholtza), τ_{th}

✦ nuklearna, τ_{nuc}

Dynamiczna skala czasu

$$\tau_{\text{dyn}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

$$\tau_{\text{dyn}} \approx 26 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \text{ [min]}$$

Typowe wartości τ_{dyn} w różnych typach gwiazd:

GWIAZDA	ρ [g/cm ³]	τ_{dyn}
gwiazda neutronowa	10^{15}	0.06 ms
Biały karzeł	10^6	2 s
Słońce	1,41	26 min
Czerwony nadolbrzym	10^{-9}	2 lata

Termiczna skala czasu

$$\tau_{\text{th}} \approx \left(\frac{GM^2}{RL} \right)$$

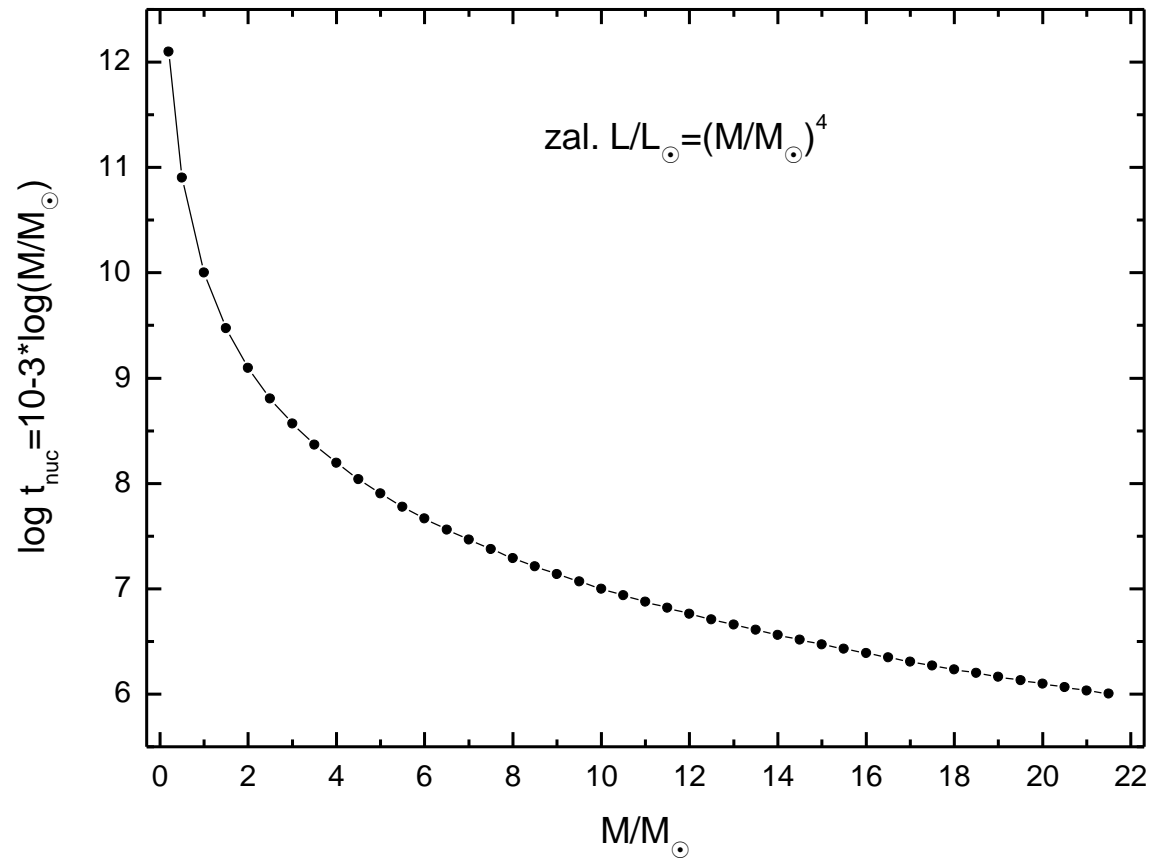
$$\tau_{\text{th}} \approx 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

Nuklearna skala czasu

$$\tau_{\text{nu}} \approx \frac{0.007\alpha M c^2}{L}$$

$$\tau_{\text{nu}} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \text{ [lat]}$$

$\tau_{\text{nuc}} \approx$ czas życia gwiazdy na MS



Dla Słońca

$$\tau_{\text{dyn}} \approx 27 \text{ min}$$

$$\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{th}} = 1.6 \cdot 10^{-12}$$

$$\tau_{\text{th}} \approx 3.1 \cdot 10^7 \text{ lat}$$

$$\tau_{\text{th}}/\tau_{\text{nuc}} \approx 3.2 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_{\text{nuc}} \approx 10^{10} \text{ lat}$$

$$\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{nuc}}$$

Tabela 5.1. Parametry i skale czasowe gwiazd wieku zero (ZAMS).
(6.263 + 03 oznacza $6,263 \cdot 10^3$)

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{R}{R_{\odot}}$	T_{eff} [K]	$\frac{L}{L_{\odot}}$	τ_{dyn} [min]	$\tau_{\text{K-H}}$ [rok]	τ_n [rok]
10.0	3.74	26564	6.263 + 03	6.086 + 01	6.664 + 04	1.649 + 07
8.9	3.50	25061	4.345 + 03	5.837 + 01	8.154 + 04	2.118 + 07
7.9	3.28	23599	2.992 + 03	5.597 + 01	1.005 + 05	2.742 + 07
7.1	3.07	22172	2.042 + 03	5.367 + 01	1.250 + 05	3.581 + 07
6.3	2.87	20797	1.383 + 03	5.143 + 01	1.567 + 05	4.712 + 07
5.6	2.69	19476	9.315 + 02	4.932 + 01	1.975 + 05	6.234 + 07
5.0	2.51	18218	6.240 + 02	4.727 + 01	2.504 + 05	8.295 + 07
4.5	2.35	17006	4.153 + 02	4.536 + 01	3.191 + 05	1.111 + 08
4.0	2.20	15853	2.752 + 02	4.356 + 01	4.085 + 05	1.494 + 08
3.5	2.07	14754	1.815 + 02	4.188 + 01	5.248 + 05	2.019 + 08
3.2	1.94	13712	1.192 + 02	4.033 + 01	6.760 + 05	2.739 + 08
2.8	1.82	12717	7.784 + 01	3.889 + 01	8.757 + 05	3.739 + 08
2.5	1.71	11776	5.021 + 01	3.735 + 01	1.151 + 06	5.167 + 08
2.2	1.62	10872	3.278 + 01	3.651 + 01	1.478 + 06	7.053 + 08
2.0	1.53	10002	2.105 + 01	3.563 + 01	1.931 + 06	9.790 + 08
1.8	1.46	9164	1.344 + 01	3.505 + 01	2.523 + 06	1.366 + 09
1.6	1.40	8329	8.449 + 00	3.491 + 01	3.322 + 06	1.937 + 09
1.4	1.36	7489	5.200 + 00	3.536 + 01	4.417 + 06	2.805 + 09
1.3	1.28	6795	3.125 + 00	3.421 + 01	6.202 + 06	4.161 + 09
1.1	1.13	6311	1.818 + 00	3.013 + 01	9.576 + 06	6.374 + 09
1.0	0.99	5872	1.037 + 00	2.600 + 01	1.530 + 07	9.963 + 09
0.9	0.87	5435	5.916 - 01	2.281 + 01	2.414 + 07	1.556 + 10
0.8	0.78	4975	3.367 - 01	2.064 + 01	3.743 + 07	2.437 + 10
0.7	0.71	4555	1.921 - 01	1.870 + 01	5.780 + 07	3.805 + 10
0.6	0.62	4274	1.141 - 01	1.622 + 01	8.834 + 07	5.712 + 10
0.6	0.53	4084	7.138 - 02	1.385 + 01	1.295 + 08	8.136 + 10
0.5	0.46	3954	4.729 - 02	1.188 + 01	1.787 + 08	1.094 + 11
0.4	0.41	3862	3.339 - 02	1.040 + 01	2.283 + 08	1.382 + 11

Twierdzenie o wiriale

$$E_k = -\frac{1}{2} \Omega$$

$$E = U + \Omega$$

Gaz jednoatomowy doskonały: $E_k = U$

$$E = E_k + \Omega = -E_k = \frac{1}{2} \Omega$$

równanie zachowania energii

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \left[\rho\epsilon - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right]$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon - \epsilon_\nu + \epsilon_g$$

L_r - strumień energii płynący przez warstwę o promieniu r

ϵ - tempo produkcji energii w reakcjach jądrowych

ϵ_ν - chłodzenie związane z emisją neutrin

ϵ_g - energia zużywana na ekspansję i kurczenie $\epsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}$

Transport energii

Promieniowanie

Fotony

Przewodnictwo

atomy, elektrony

Konwekcja

bąble materii

Transport promienisty

Przybliżenie dyfuzyjne

$$F_{\text{dyf}} = -D \nabla N$$

$$D = (v l) / 3$$

Fotony:

$$v \rightarrow c$$

$$l \rightarrow l_{\text{ph}} = 1 / (\kappa \rho)$$

$$N = U_{\text{rad}} = a T^4$$

Równanie transportu energii

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla,$$

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\sigma G} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

transport promienisty

jeśli

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$$

transport konwektywny

Zmiana składu chemicznego


Zazwyczaj uwzględniamy tylko zmiany składu chemicznego powodowane przez reakcje jądrowe.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right]$$

r_{ji} - tempo powstawania izotopu i z izotopu j

r_{ik} - tempo przemiany izotopu i w izotop k

Dane mikrofizyki

- równanie stanu, $P=P(\rho, T, X_i)$
 - nieprzezroczystości materii, $\kappa=\kappa(\rho, T, X_i)$
 - tempa reakcji jądrowych, $r_{jk}=r_{jk}(\rho, T, X_i)$
 - tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, X_i)$
- 

Równanie stanu

Gaz doskonały

$$P = NkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

dla gwiazd masywnych

Ciśnienie
promieniowania

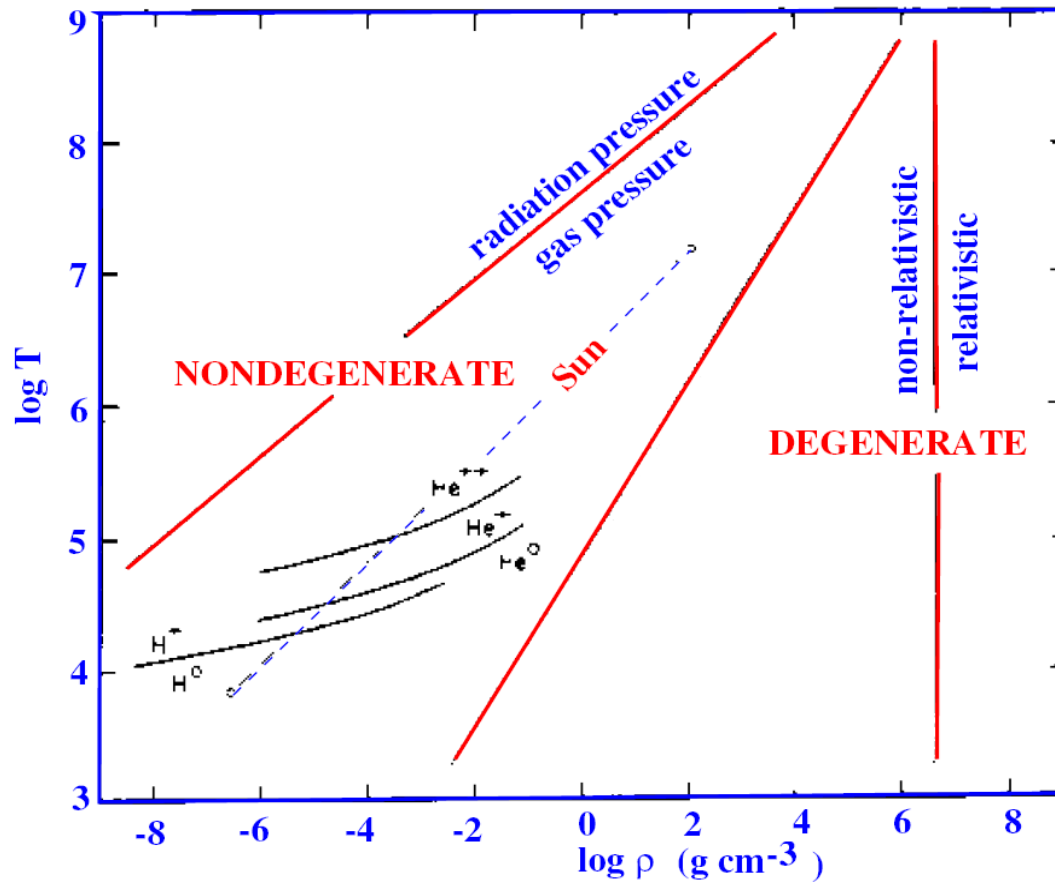
$$P = \rho kT / (\mu m_H) + aT^4 / 3.$$

Gaz zdegenerowany

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{20m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} = 1.0036 \times 10^{13} \text{ [cgs]}$$

$$P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad K_{ER} = \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} = 1.2435 \times 10^{15} \text{ [cgs]}$$

Równanie stanu



nieprzezroczystość materii, κ , zależy od

- ◆ **temperatury**
- ◆ **gęstości**
- ◆ **składu chemicznego**

nieprzezroczystość determinuje transport promieniowania przez materię

Wysokie temperatury

$$\kappa = 0.02(1+X) \text{ (rozp. Thomsona)}$$

Pośrednie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho T^{-3.5} \text{ (wzór Kramersa)}$$

bardzo niskie temperatury

$$\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^4$$

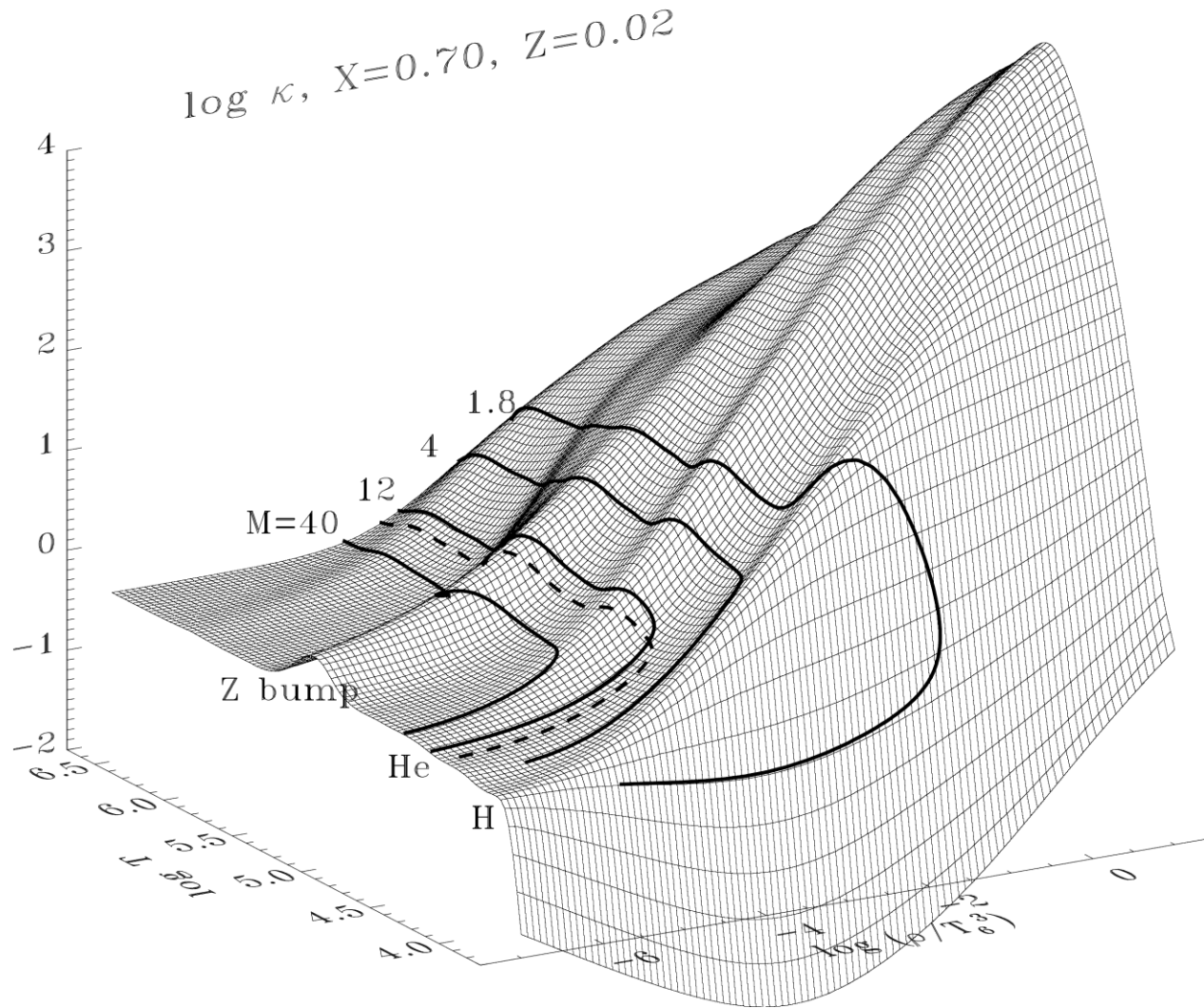
W praktyce liczy się prawdopodobieństwa procesów, w których foton o energii $h\nu$ zostanie pochłonięty lub rozproszony.

metody perturbacyjne mechaniki kwantowe



przekroje czynne dla różnych procesów

Nieprzezroczystość, $\kappa(\text{OPAL})$, w zależności od $\log T$ i $\log \rho/T_6^3$ ($T_6 = T/10^6$)



Tempa reakcji jądrowych, $r_{jk} = r_{jk}(\rho, T, X_i)$

- ✘ tempa produkcji energii jądrowej, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X_i)$
- ✘ strumień neutrin
- ✘ zmiany składu chemicznego

Prawdopodobieństwo przeniknięcia bariery kulombowskiej (współczynnik Gamowa)

$$P_p(v) \propto \exp[-(4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2 / hv)]$$

Tempo produkcji energii $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^{\eta_1} T^{\eta_2}$ erg/g/s

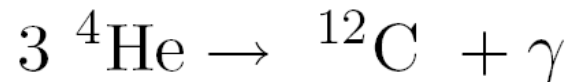
przemiana wodoru w hel



Cykl p-p $\varepsilon_{\text{PP}} \simeq \varepsilon_1 X_{\text{H}}^2 \rho T^4$;

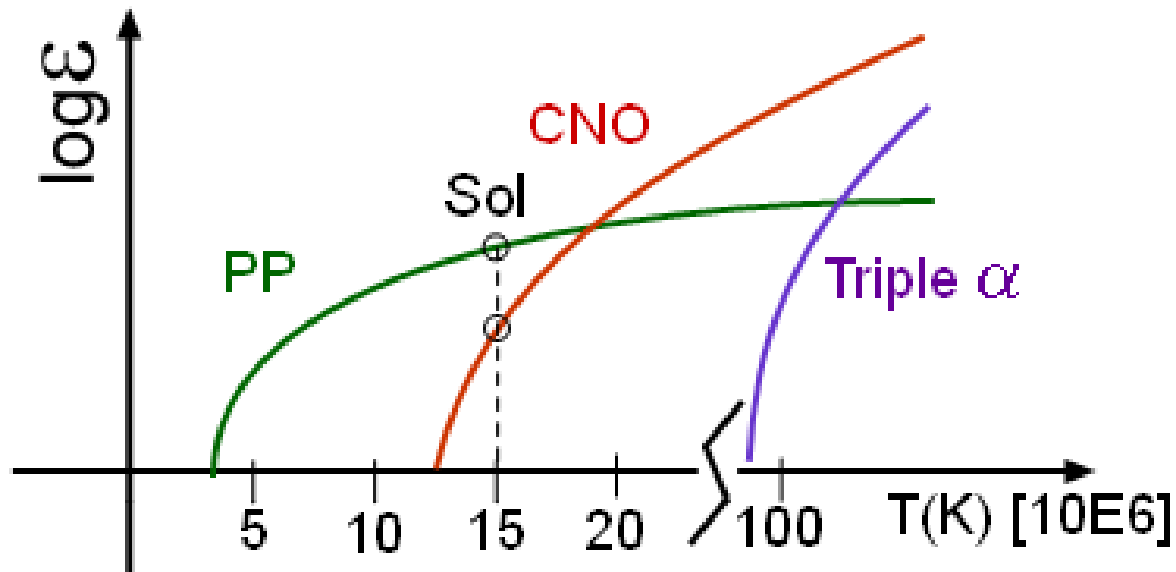
Cykl CNO $\varepsilon_{\text{CNO}} \simeq \varepsilon_2 X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} \rho T^{20}$.

przemiana helu w węgiel



Reakcja 3 α $\varepsilon_{3\alpha} \simeq \varepsilon_3 X_{\text{He}}^3 \rho^2 T^{30}$.

Wydajność energetyczna reakcji



RÓWNANIA BUDOWY WEWNĘTRZNEJ I EWOLUCJI

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

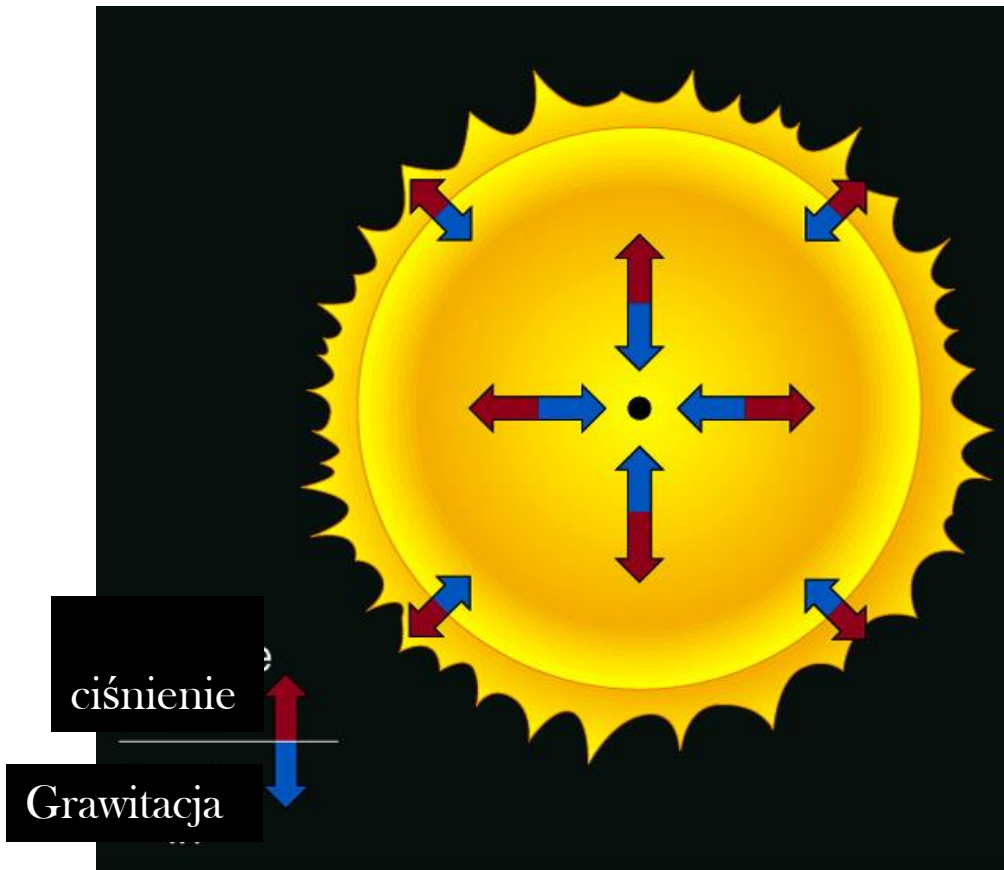
$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \Delta\nabla & \text{if } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) \quad [+ \text{ mixing terms}] \quad i = 1 \dots N$$

Równowaga hydrostatyczna



$$\cancel{\frac{dv}{dt}}$$

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Równowaga termiczna

$$\cancel{\varepsilon_g = T \frac{\partial S}{\partial t}} \quad \cancel{\varepsilon_\nu}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon$$

Przyrost strumienia promieniowania w warstwie o masie dm jest równy energii wyprodukowanej przez tę warstwę w reakcjach jądrowych

Warunki brzegowe

W centrum: $m=0 \rightarrow r=0, L_r=0$

Na powierzchni: $m=M \rightarrow P=0, T=T_S=(L/8\pi R^2\sigma)^{1/4}$

W centrum gwiazdy musimy dopasować:
gęstość centralną ρ_c oraz temperaturę centralną T_c .
Natomiast na powierzchni gwiazdy:
promień R oraz moc promieniowania L .

Tylko (R i L) mogą być wyznaczone z obserwacji.

Mamy $4+I$ równań różniczkowych na $4+I$ niewiadome: $r, P, T, L_r, X_1, \dots, X_I$ w funkcji (m, t)

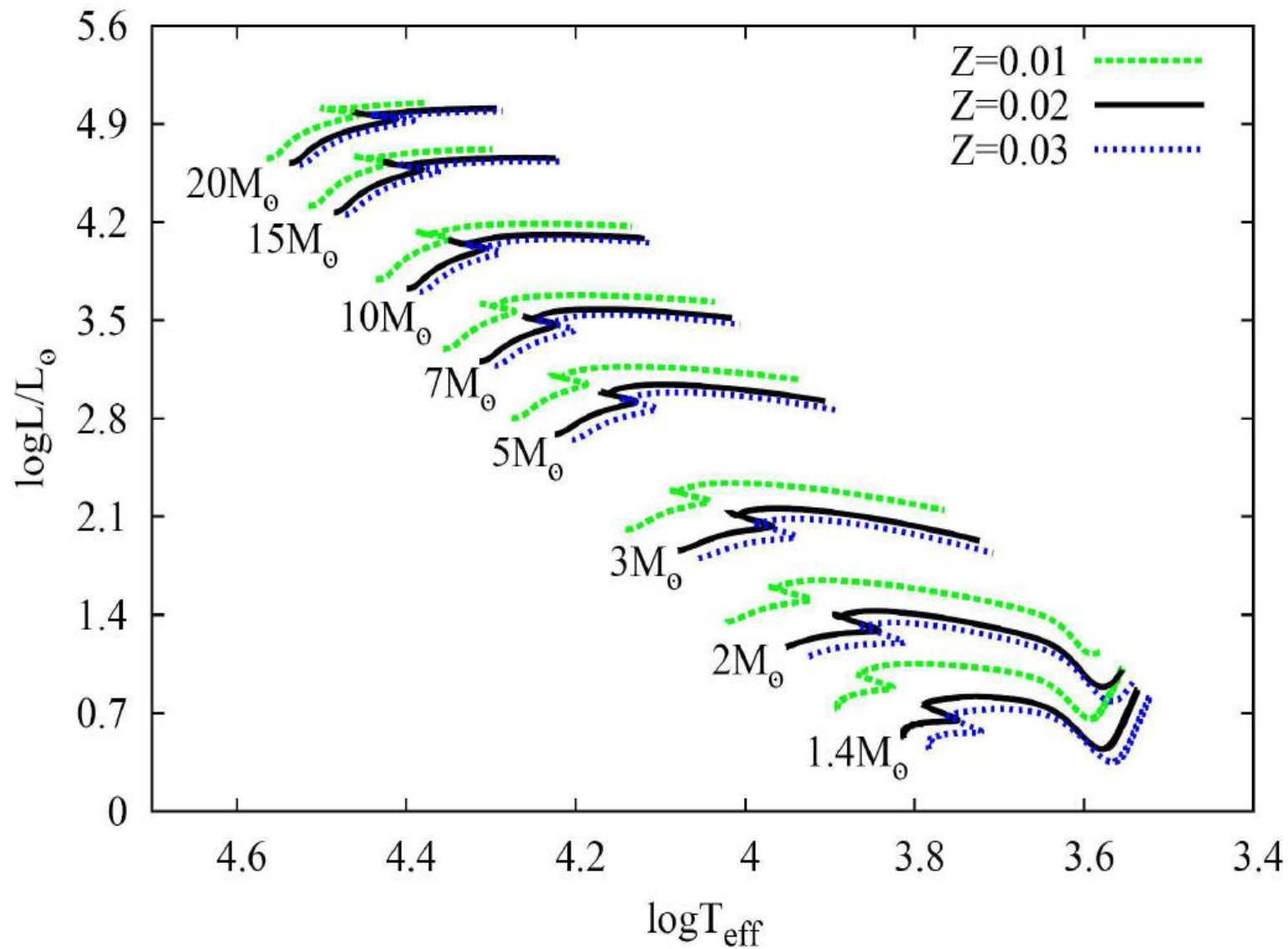
Dla danego ΣX_i i czasu t ,
rozwiązujemy równania na r, P, T, L_r .

Kolejny model ma skład:

$$X(m, t + \Delta t) \approx X(m, t) + \Delta t r_X(m, t)$$

Dostajemy ciąg modeli ewolucyjnych, w którym model w czasie t_i zależy od modelu w czasie t_{i-1} .

Parametrem odróżniającym modele jest masa.

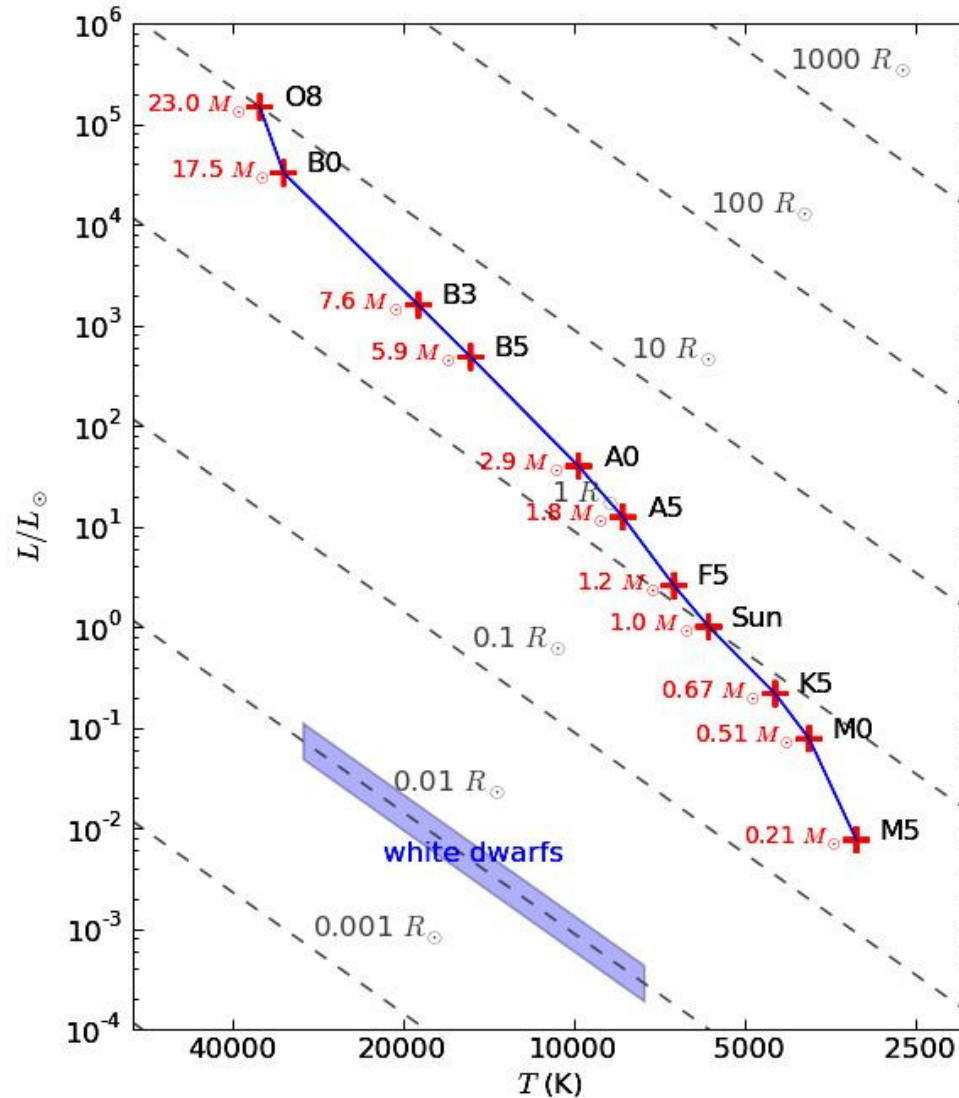


Gwiazda ciągu głównego wieku zero

Gwiazda, która „zapaliła” już wodór, a jego „spalanie” wytwarza tyle energii ile jest wypromieniowanej z powierzchni. Jednocześnie nie ma jeszcze pomniejszenia obfitości wodoru.

Gwiazda w równowadze hydrostatycznej, termicznej i chemicznie jednorodna.

ciąg główny wieku zero i linie stałych promieni

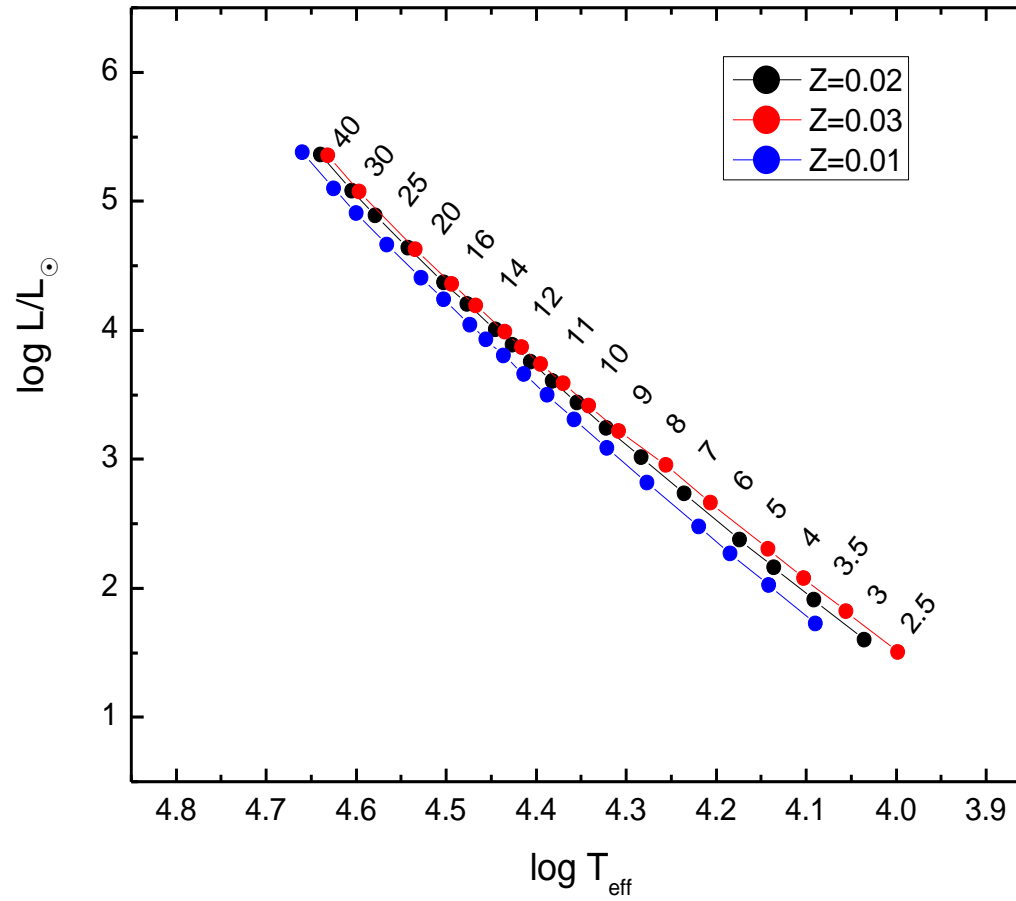


Ciąg główny wieku zero (ZAMS=Zero Age Main Sequence)

X=0.70, Z=0.02, κ OPAL, GN93, OPAL EOS, $\alpha_{\text{conv}}=1.0$, Vrot=0.0

M	lg(t)	lgTs	lgTeff	lg L	lggeff	lgTc	lgRhoc	Xc	Mc/M
1.0	0.0000	3.6505	3.7262	-0.1368	4.4309	7.1335	1.9265	.7000000	.0000
1.1	0.0000	3.6746	3.7503	0.0672	4.3646	7.1680	1.9355	.7000000	.0007
1.2	0.0000	3.6983	3.7740	0.2515	4.3129	7.1995	1.9405	.7000000	.0110
1.3	0.0000	3.7229	3.7986	0.4163	4.2814	7.2272	1.9401	.7000000	.0287
1.7	0.0000	3.8307	3.9064	0.9269	4.3185	7.3000	1.8834	.7000000	.1083
2.0	0.0000	3.8882	3.9639	1.2149	4.3310	7.3297	1.8155	.7000000	.1444
2.5	0.0000	3.9599	4.0357	1.5989	4.3311	7.3617	1.7034	.7000000	.1792
3.0	0.0000	4.0152	4.0911	1.9061	4.3248	7.3842	1.6051	.7000000	.2015
4.0	0.0000	4.0982	4.1741	2.3773	4.3106	7.4164	1.4463	.7000000	.2281
5.0	0.0000	4.1592	4.2352	2.7309	4.2983	7.4397	1.3241	.7000000	.2461
6.0	0.0000	4.2070	4.2830	3.0119	4.2878	7.4578	1.2263	.7000000	.2614
7.0	0.0000	4.2458	4.3219	3.2431	4.2790	7.4726	1.1464	.7000000	.2751
8.0	0.0000	4.2783	4.3544	3.4388	4.2713	7.4850	1.0790	.7000000	.2887
9.0	0.0000	4.3058	4.3820	3.6068	4.2648	7.4955	1.0217	.7000000	.3006
10.0	0.0000	4.3298	4.4060	3.7544	4.2590	7.5047	0.9719	.7000000	.3158
12.0	0.0000	4.3692	4.4453	4.0015	4.2487	7.5197	0.8890	.7000000	.3420
14.0	0.0000	4.4008	4.4770	4.2027	4.2409	7.5319	0.8235	.7000000	.3701
16.0	0.0000	4.4267	4.5029	4.3707	4.2344	7.5420	0.7695	.7000000	.3965
20.0	0.0000	4.4666	4.5426	4.6377	4.2235	7.5578	0.6856	.7000000	.4452
25.0	0.0000	4.5023	4.5784	4.8879	4.2132	7.5724	0.6084	.7000000	.4996
30.0	0.0000	4.5282	4.6043	5.0802	4.2038	7.5835	0.5502	.7000000	.5447
40.0	0.0000	4.5632	4.6393	5.3616	4.1873	7.5993	0.4653	.7000000	.6186
60.0	0.0000	4.5991	4.6752	5.7188	4.1500	7.6189	0.3580	.7000000	.7151
90.0	0.0000	4.6141	4.6902	6.0366	4.0687	7.6357	0.2609	.7000000	.7938

ZAMS



Twierdzenie Vogta–Russell'a:

- 1) **każdej konfiguracji o danym składzie chemicznym i danej masie odpowiada jeden ściśle określony punkt na diagramie H–R, przy czym różnym masom odpowiadają różne punkty**
- 2) **z materii o danej masie i ustalonym składzie chemicznym można zbudować tylko jedną trwałą gwiazdę**

NIE ZAWSZE JEST SPEŁNIONE